等额年金

年金的含义

- 一系列的付款（或收款）形成的现金流。
- 付款时间和付款金额具有一定规律性。
- 例：住房贷款的还款额

年金的类型

（1）支付时间和支付金额是否确定？

- 确定年金
- 风险年金

年金的类型

（2）支付期限？

- 定期年金
- 永续年金

年金的类型

（3）支付时点？

- 期初付年金
- 期末付年金

年金的类型

（4）开始支付的时间？

- 即期年金，简称年金
- 延期年金

年金的类型

（5）每次付款的金额是否相等？

- 等额年金
- 变额年金

- **如何计算年金的价值？**
  - 每年支付1次的年金
  - 每年支付m 次的年金
  - 连续支付的年金（每年支付∞ 次的年金）

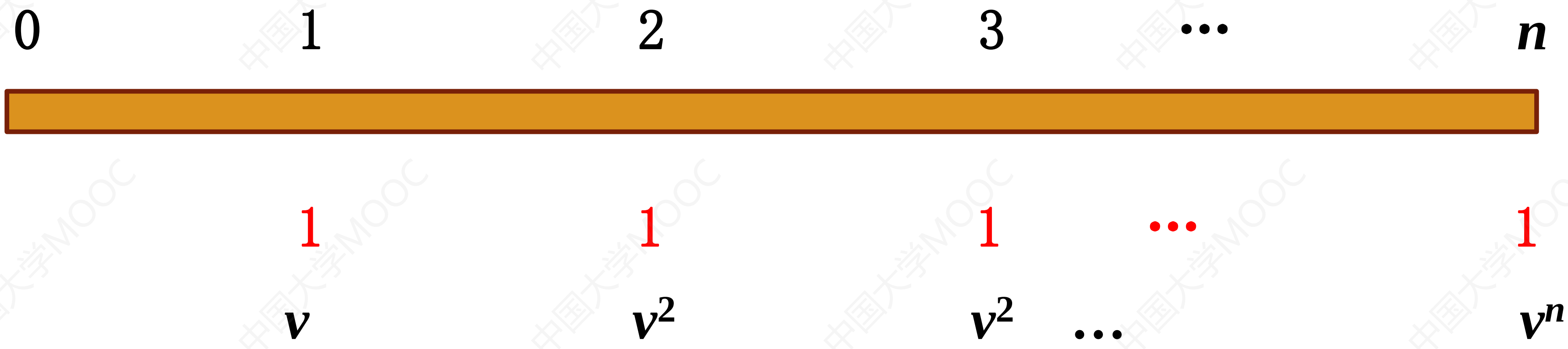
期末付等额年金

时间：	0	1	2	3	…	n
金额：		1	1	1	…	1

年金的价值：

- 现值
- 终值（累积值）

每年末支付一次的等额年金：现值



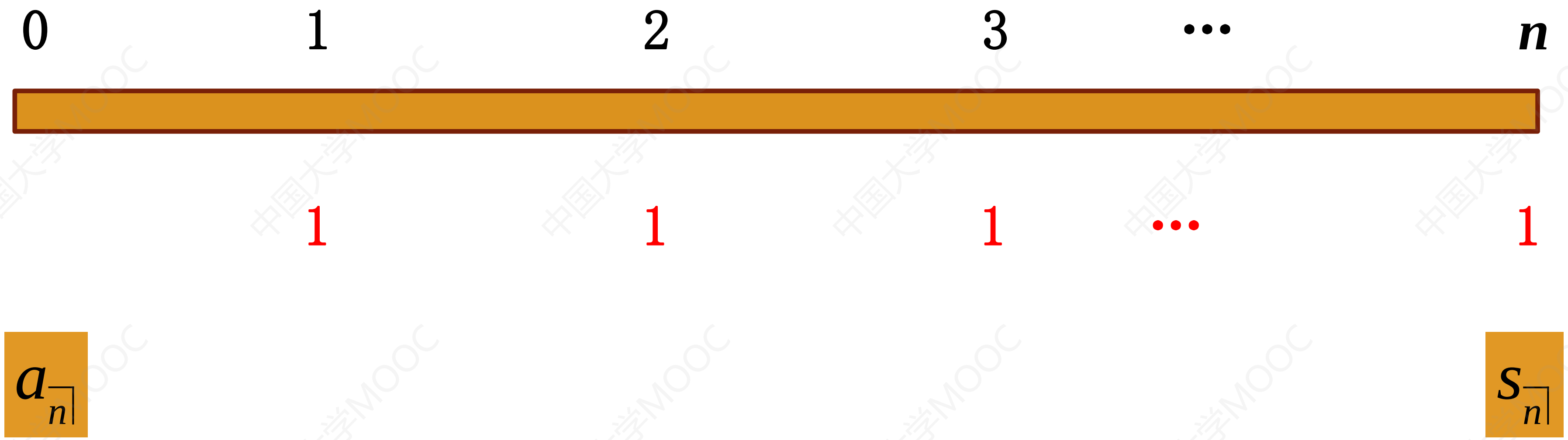
$$a_{\overline{n}|} = v + v^2 + \cdots + v^n$$

$$(1+i)a_{\overline{n}|} = 1 + v + v^2 + \cdots + v^{n-1}$$

$$ia_{\overline{n}|} = 1 - v^n$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$$

每年末支付一次的等额年金：终值（累积值）



$$s_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|}(1+i)^n$$

例：解释等价关系 $1 = i a_{\overline{n}|} + v^n$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i}$$

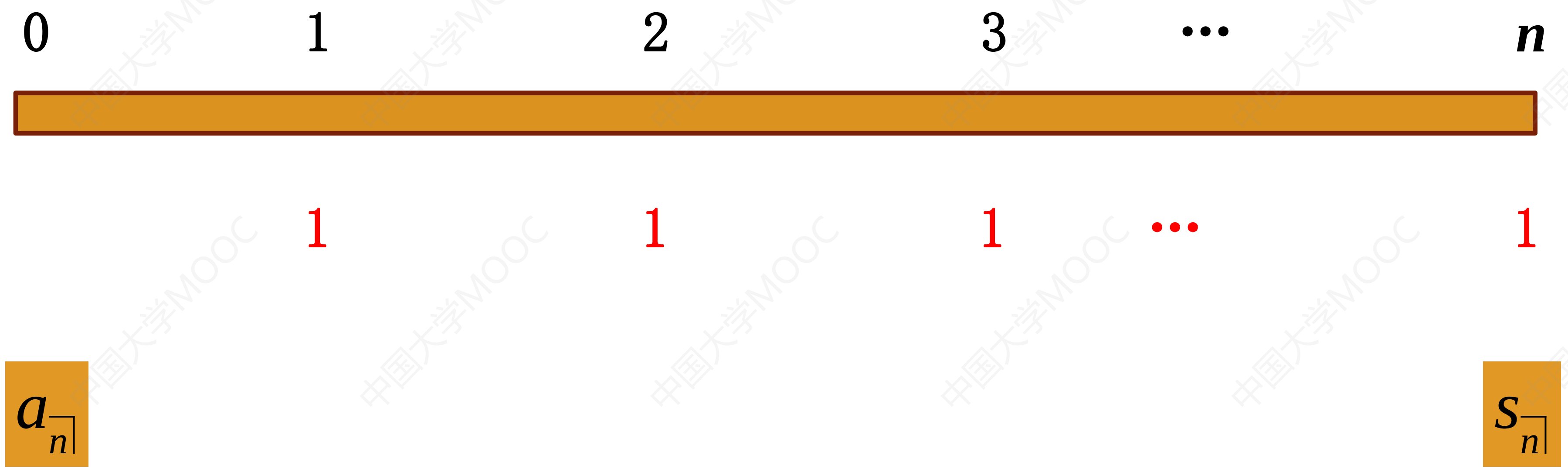
含义：初始投资1，在每年末产生利息i，这些利息的现值为 $i a_{\overline{n}|}$。

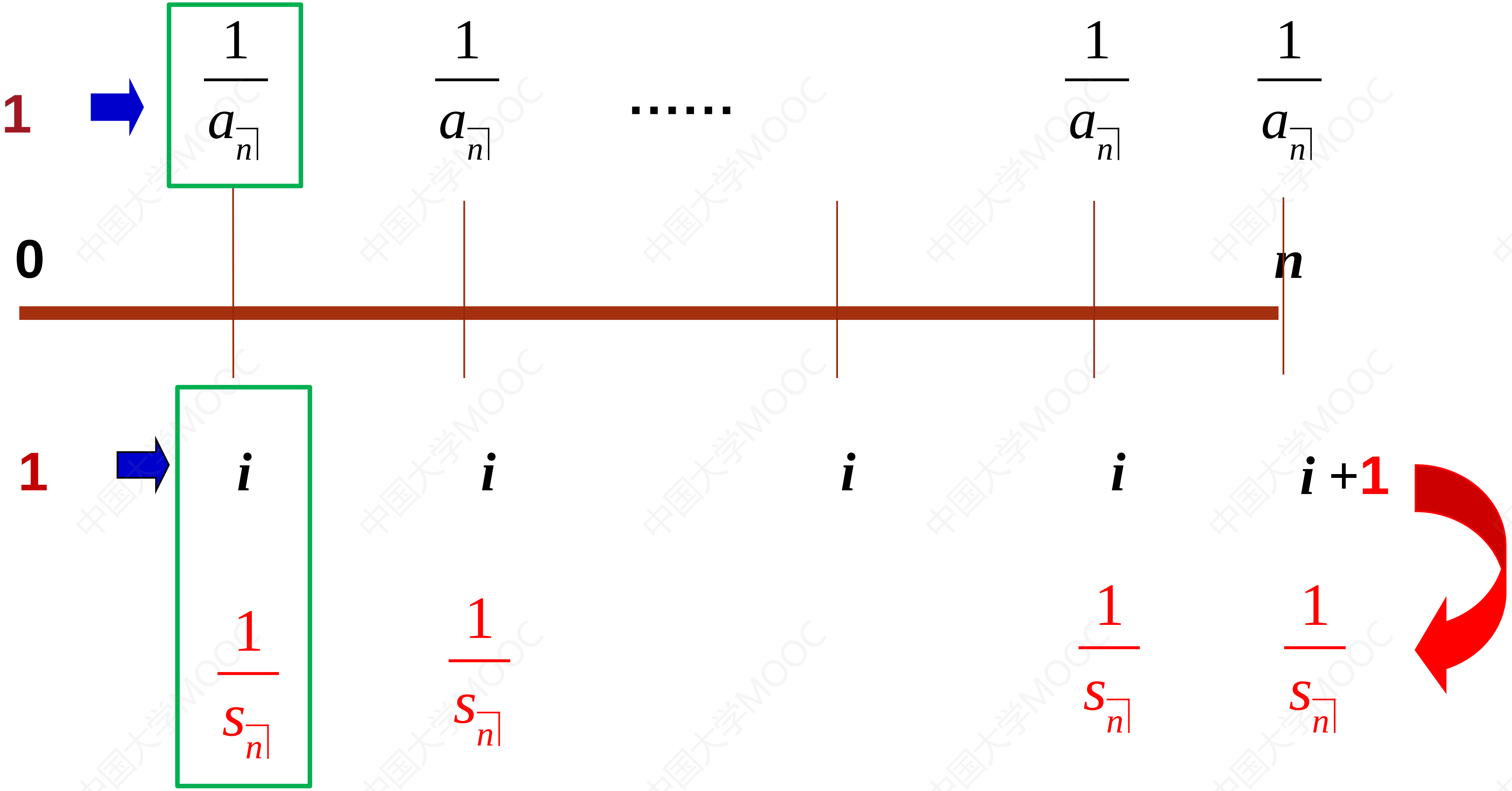
在第n个时期末收回本金1，其现值为 v^n。

0	1	2	3	…	n
1	i	i	i	…	i
					1

例：解释等价关系：

$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$$



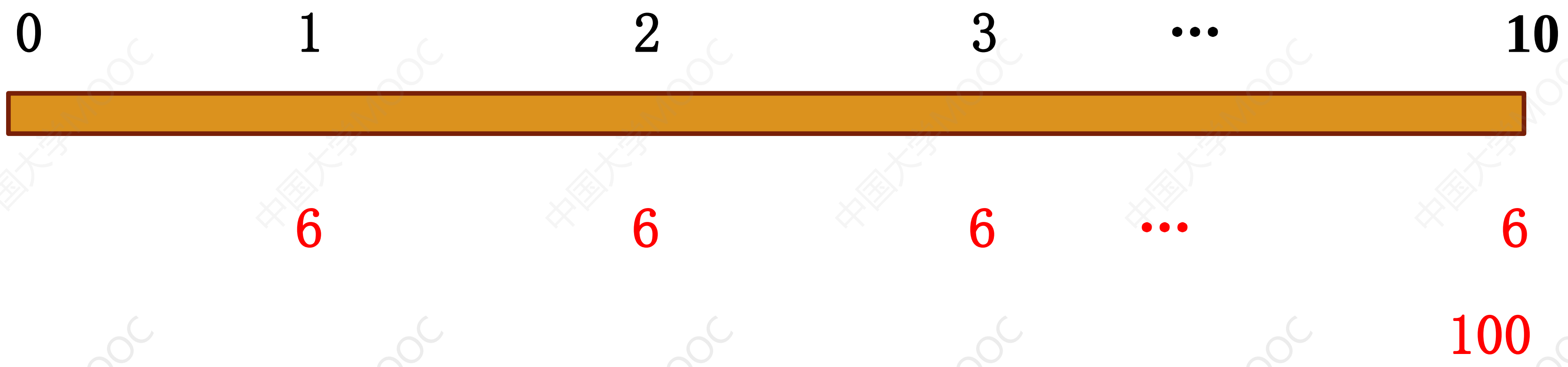


$$\frac{1}{a_{\overline{n}|}} = \frac{1}{s_{\overline{n}|}} + i$$

例：银行贷款为100万元，期限10年，年利率为6%。分别在下述两种情况下计算银行在第10年末的累积值（先根据经验判断，哪个的累积值更大？）。

（1）本金和利息在第10年末一次还清；

（2）利息在当年末支付，本金在第10年末偿还（收到的利息按6%的利率投资）。



参考答案：

（1） $100\times(1+0.06)^{10}=179.08$

（2） $6s_{\overline{10|}}+100=6\times\dfrac{1.06^{10}-1}{0.06}=179.08$

思考题

一项年金，每 k 年末支付一次，每次支付1元，一共支付 n 次。年有效利率为 i，写出该年金的现值计算公式。

期初付等额年金

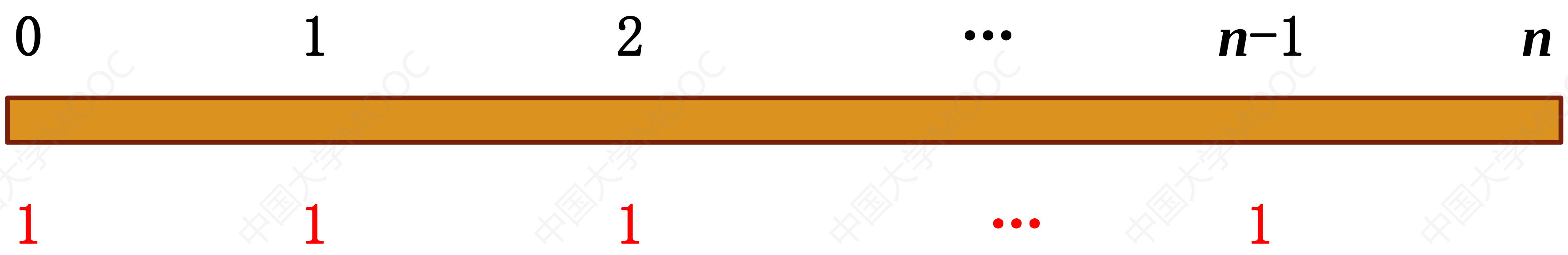
含义：在 n 个时期，每个时期初付款1元。

	0	1	2	…	$n-1$	n
$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil}$	1	1	1	…	1	
$(1+i)\times a_{\overline{n}\rceil}$		1 + i	1 + i	…		1 + i

$$\ddot{a}_{\overline{n}\rceil} = (1+i)\times a_{\overline{n}\rceil}$$

注：年初的 1 元 = 年末的 1 + i 元

练习：验证下述关系成立



$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+i)\times a_{\overline{n}|} \Leftrightarrow \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}$$

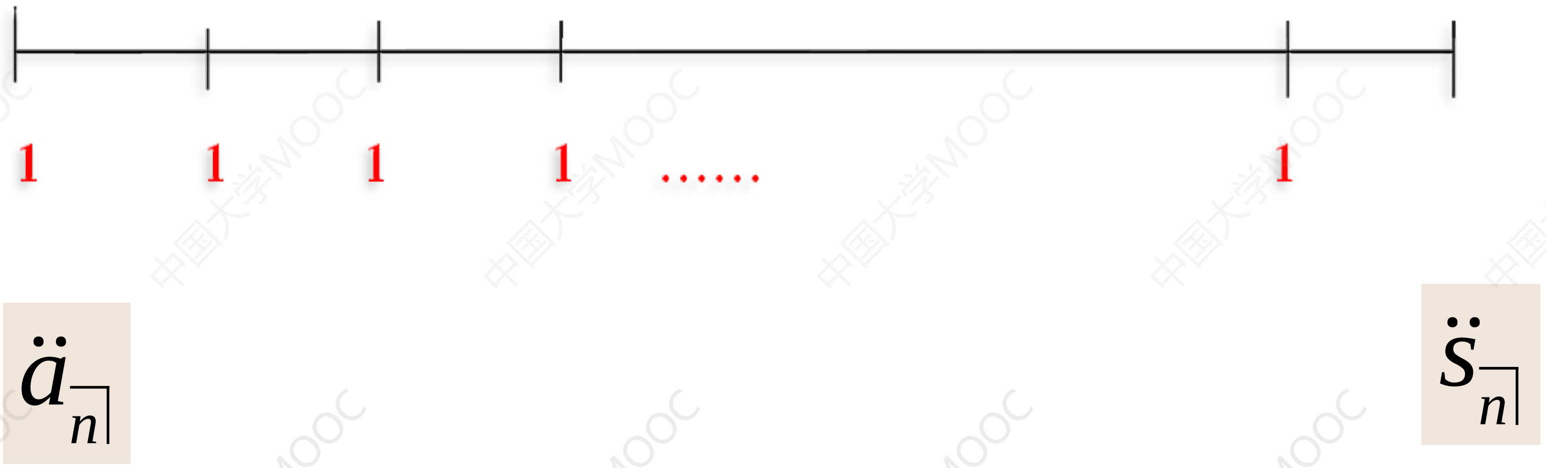
期初付等额年金的终值（积累值）

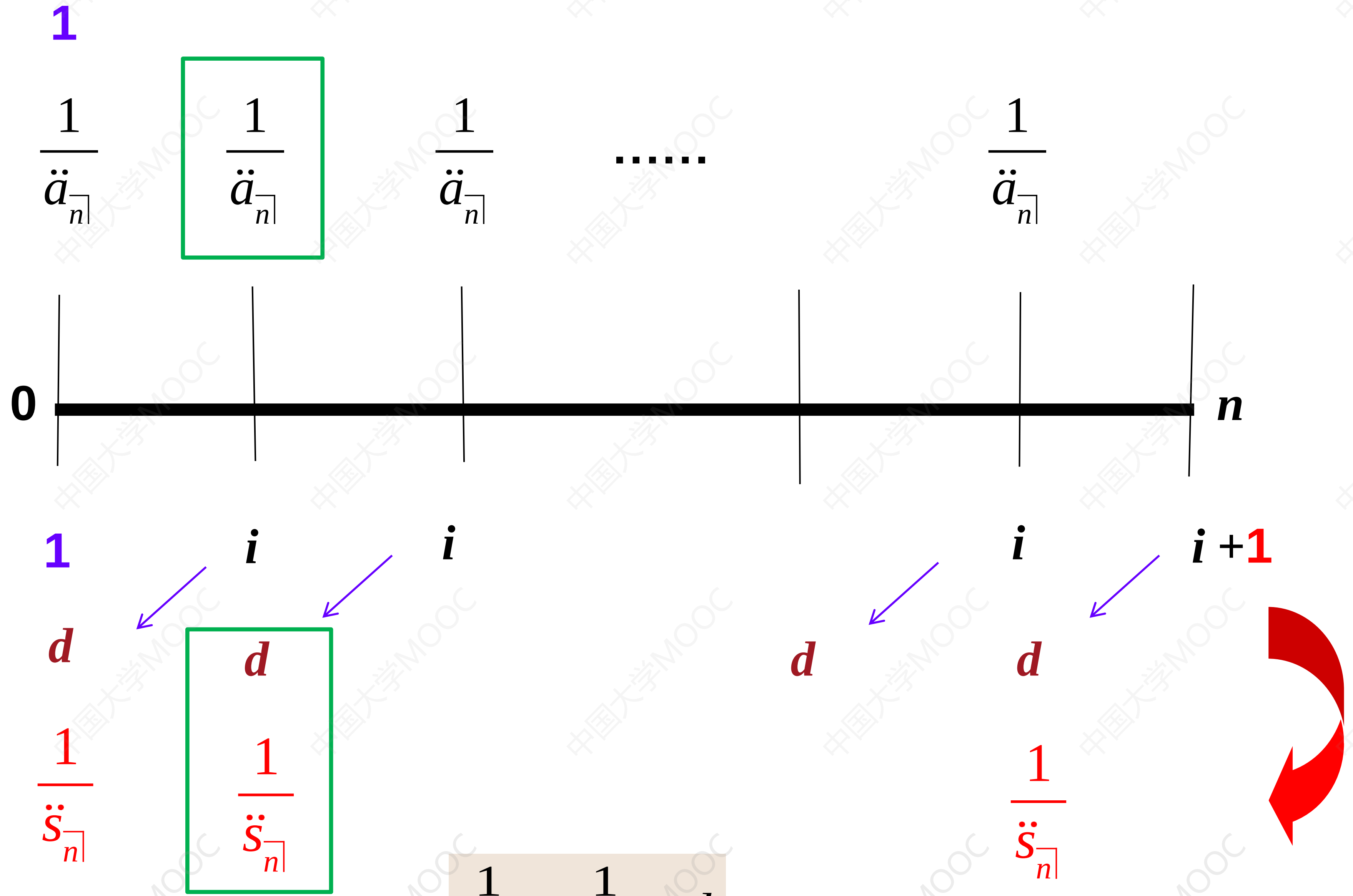
$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \ddot{a}_{\overline{n}|}(1+i)^n$$

$\ddot{a}_{\overline{n}|}$ $\ddot{s}_{\overline{n}|}$

练习：解释下述关系成立

$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}} = \frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}} + d$$



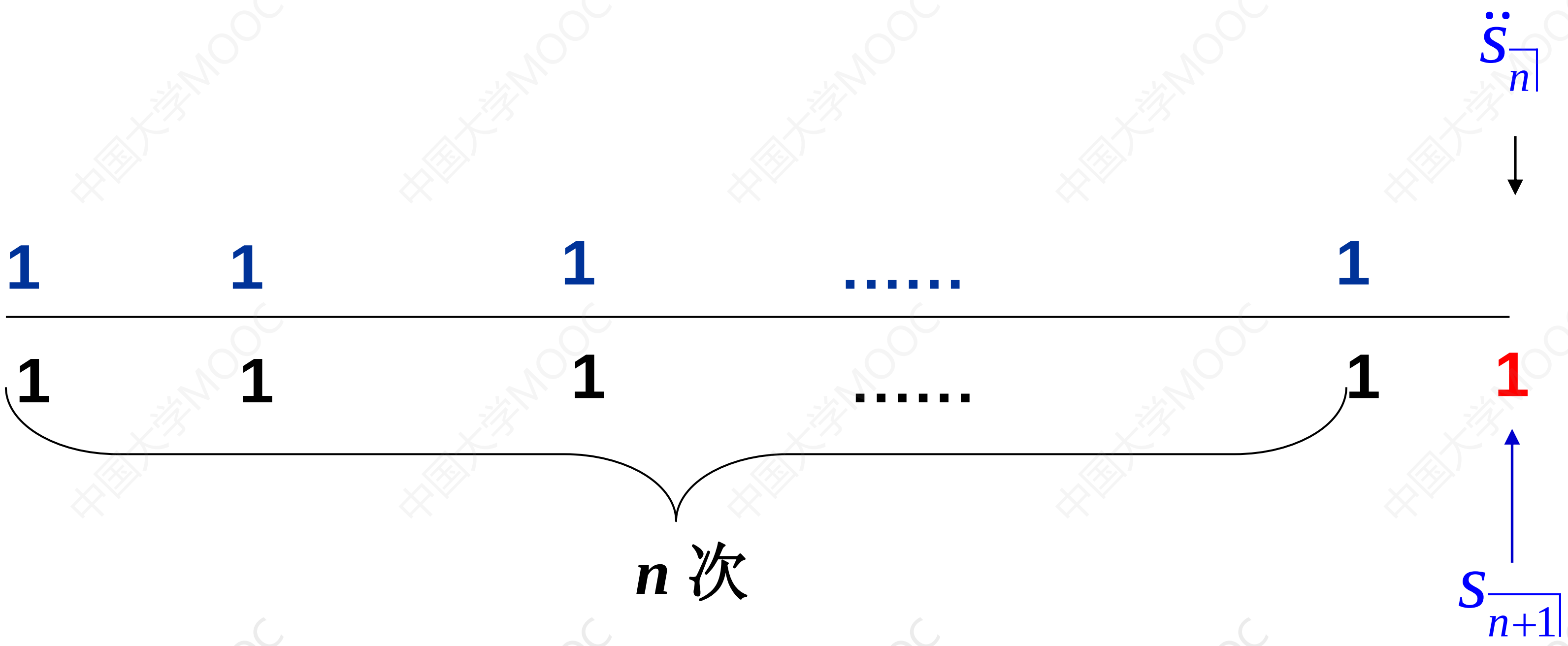


$$\frac{1}{\ddot{a}_{\overline{n}|}}=\frac{1}{\ddot{s}_{\overline{n}|}}+d$$

例：期初付年金和期末付年金的关系 $\ddot{a}_{\overline{n}|} = 1 + a_{\overline{n-1}|}$

	0	1	2	…	$n-1$	n
$\ddot{a}_{\overline{n}|}$	1	1	1	…	1	
1	1					
$a_{\overline{n-1}|}$		1	1	…	1	

例：期初付年金和期末付年金的关系 $\ddot{s}_{\left.\overline{n}\right|} = s_{\left.\overline{n+1}\right|} - 1$



例：一项年金还有12次支付，每年初支付10000; 第一次支付发生在当前时刻。如果将该年金转换为25年期的期末付年金，第一次支付发生在第一年末。如果年有效贴现率为5%，计算每年末的付款金额。

$$10000\ddot{a}_{\overline{12}|}$$

$$Xa_{\overline{25}|}$$

$$10000\ddot{a}_{\overline{12}|} = Xa_{\overline{25}|}$$

$$i = \frac{d}{1-d}$$

参考答案：

$$\boldsymbol{d = 5\%} \Rightarrow i = \frac{d}{1-d} = \frac{0.05}{0.95} = \frac{1}{19}$$

令 X 是新年金在每年末的支付额，则

$$10000\ddot{a}_{\overline{12}|} = Xa_{\overline{25}|} \Rightarrow X = 6695.61$$

例：投资者在每4年的期初存入100，持续40年。账户在40年末的累积值为x，是账户在20年末的累积值的5倍. 计算 x.

0	1	2	…	5	…	10
0	4	8	…	20	…	40
100	100	100	…	100	…	100

令4年期的有效利率为 j

$$100\ddot{s}_{\overline{5}|j}$$

$$x = 100\ddot{s}_{\overline{10}|j}$$

$$100\ddot{s}_{\overline{10}|j} = 5\times 100\ddot{s}_{\overline{5}|j}$$

参考答案：

$$100\ddot{s}_{\overline{10}|j} = 5\times 100\ddot{s}_{\overline{5}|j}$$

$$\Rightarrow j = 31.9508\%$$

$$X = 100\ddot{s}_{\overline{10}|j} = 6194.72$$

应用Excel计算等额年金（参见MOOC视频）

计算现值：PV(rate, nper, pmt, [fv], [type])

计算终值：FV(rate, nper, pmt, [pv], [type])

rate　利率

nper　付款次数

pmt　每次的付款额

fv　终值。缺省值为0

pv　现值。缺省值为0

type　0表示期末，1表示期初。缺省值为0

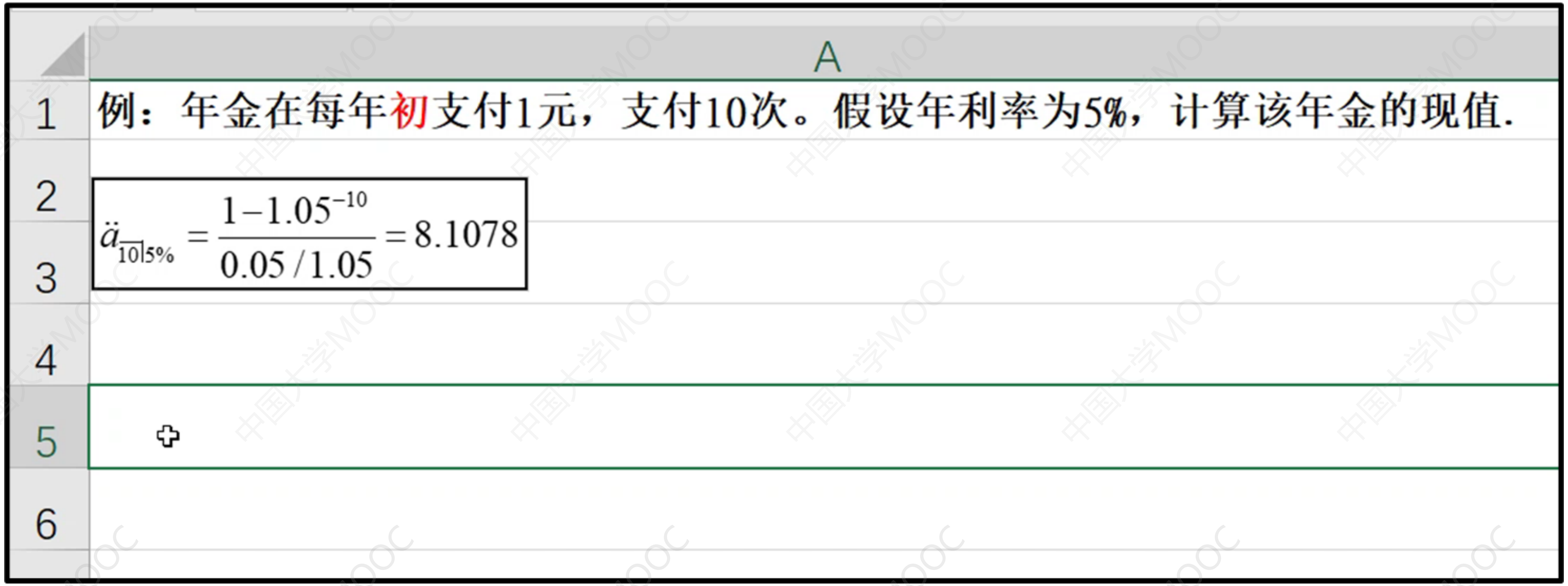
例：年金在每年末支付1元，支付10次。假设年利率为5%，计算该年金的现值。

$$a_{\overline{10}|5\%}=\frac{1-1.05^{-10}}{0.05}=7.7217$$

	A
1	例：年金在每年末支付1元，支付10次。假设年利率为5%，计算该年金的现值
2	$a_{\overline{10}\|5\%}=\frac{1-1.05^{-10}}{0.05}=7.7217$
3	
4	
5	
6	

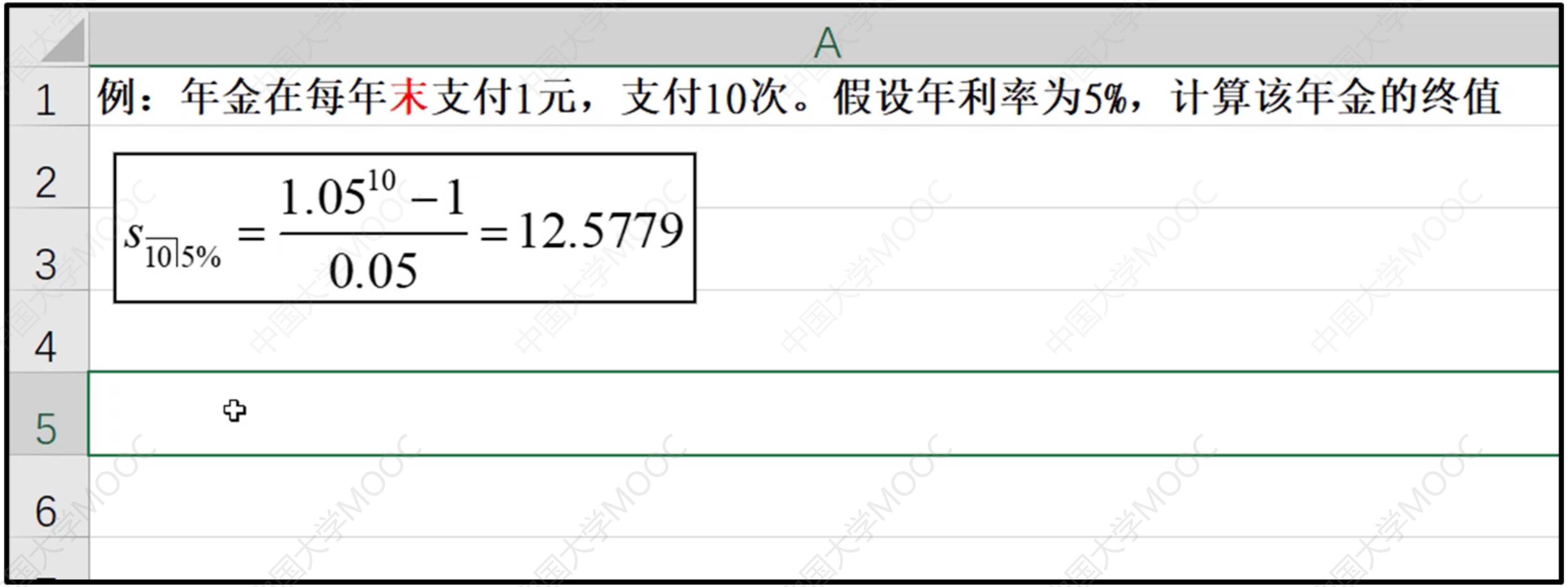
例：年金在每年初支付1元，支付10次。假设年利率为5%，计算该年金的现值

$$\ddot{a}_{\overline{10}|5\%} = \frac{1-1.05^{-10}}{0.05/1.05} = 8.1078$$



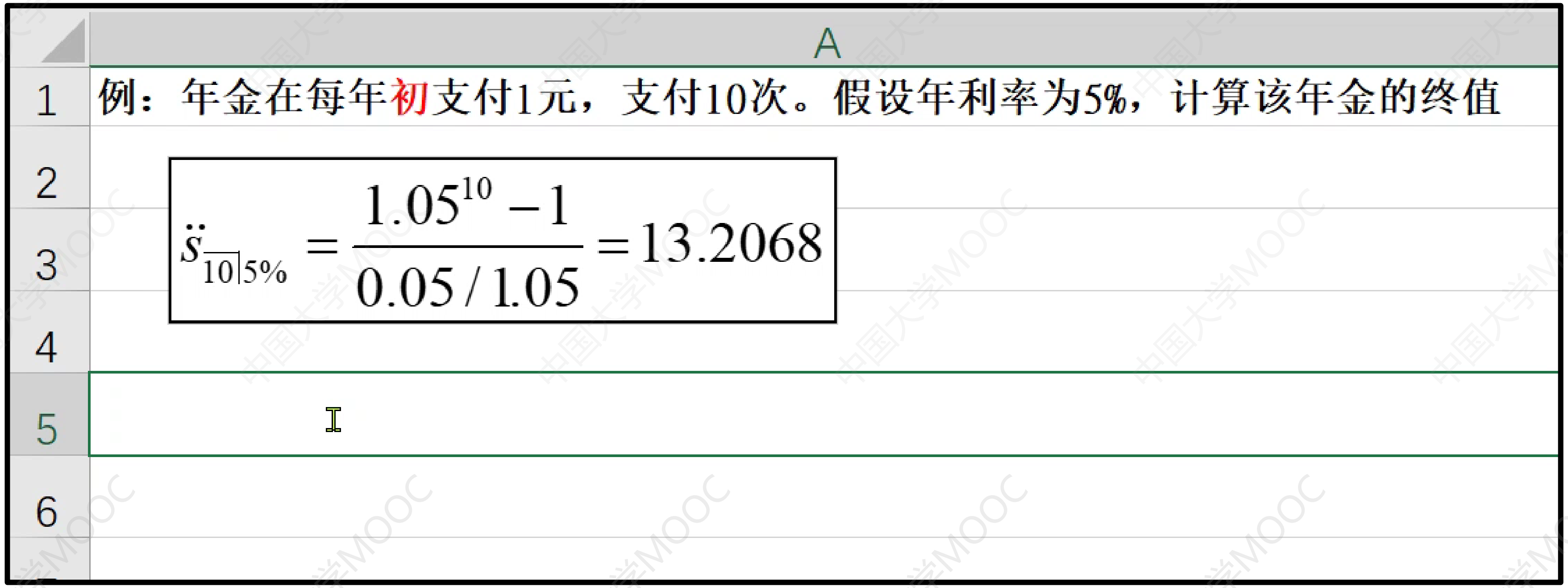
例：年金在每年末支付1元，支付10次。假设年利率为5%，计算该年金的终值

$$s_{\overline{10}|5\%}=\frac{1.05^{10}-1}{0.05}=12.5779$$



例：年金在每年初支付1元，支付10次。假设年利率为5%，计算该年金的终值

$$\ddot{s}_{\overline{10}|5\%} = \frac{1.05^{10}-1}{0.05/1.05} = 13.2068$$



例：年金在每年末支付100元，支付10次。第10年末另有1000元付款。假设年利率为5%，计算该年金的现值。

0	1	2	3	……	9	10
	100	100	100	……	100	100
						1000

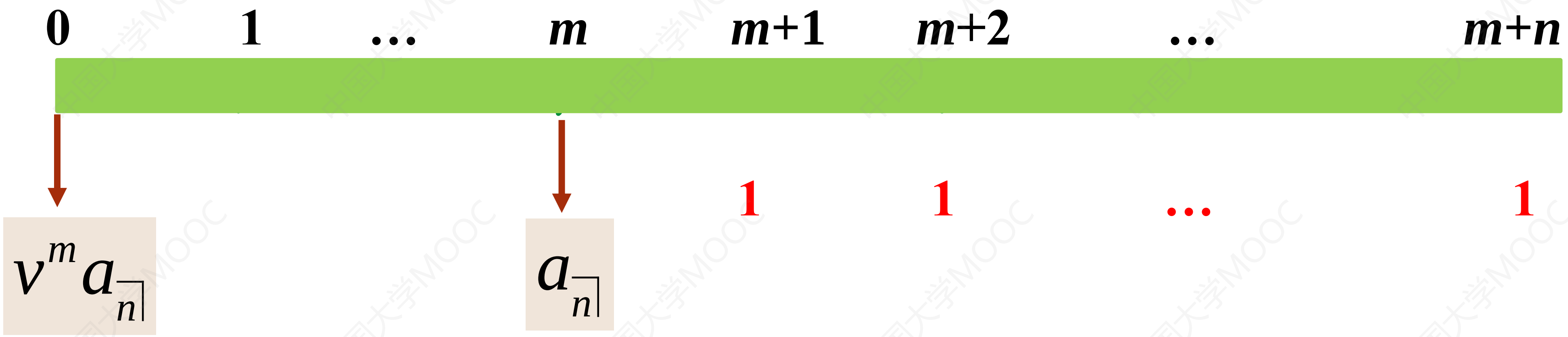
$$PV = 100a_{\overline{10}|5\%} + 1000(1+5\%)^{-10} = 1386.09$$

应用EXCEL求解

	A
1	例：年金在每年末支付100元，支付10次。第10年末另有1000元付款。假设年利率为5%，计算该年金的现值。
2	
3	
4	
5	
6	

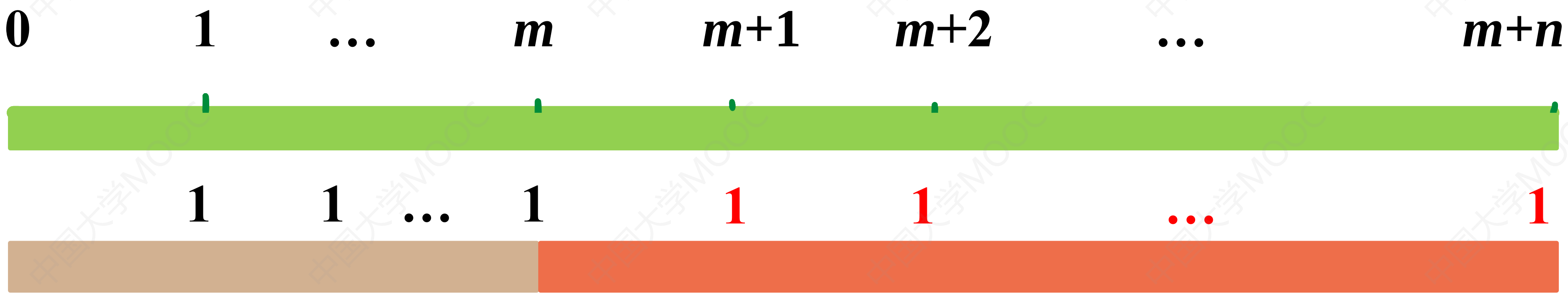
延期年金

含义：延期 m 年开始支付，每年末支付 1 元的 n 年期年金



$$ {}_{m|}a_{\overline{n}|} = v^m a_{\overline{n}|} $$

延期年金

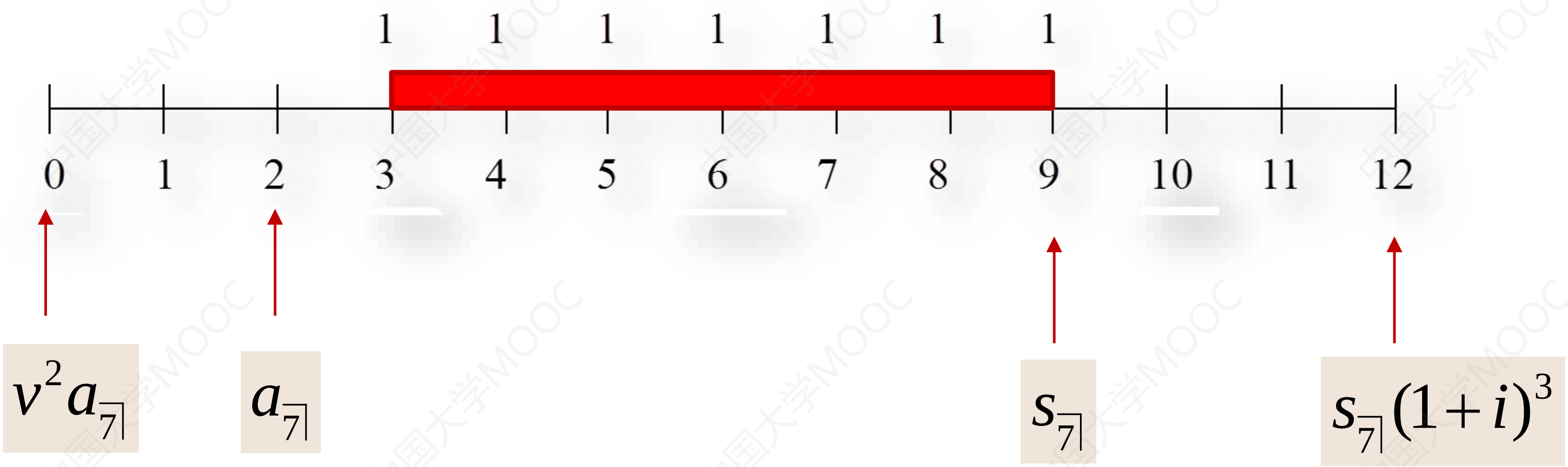


$a_{\overline{m+n}|}$

$a_{\overline{m}|}$

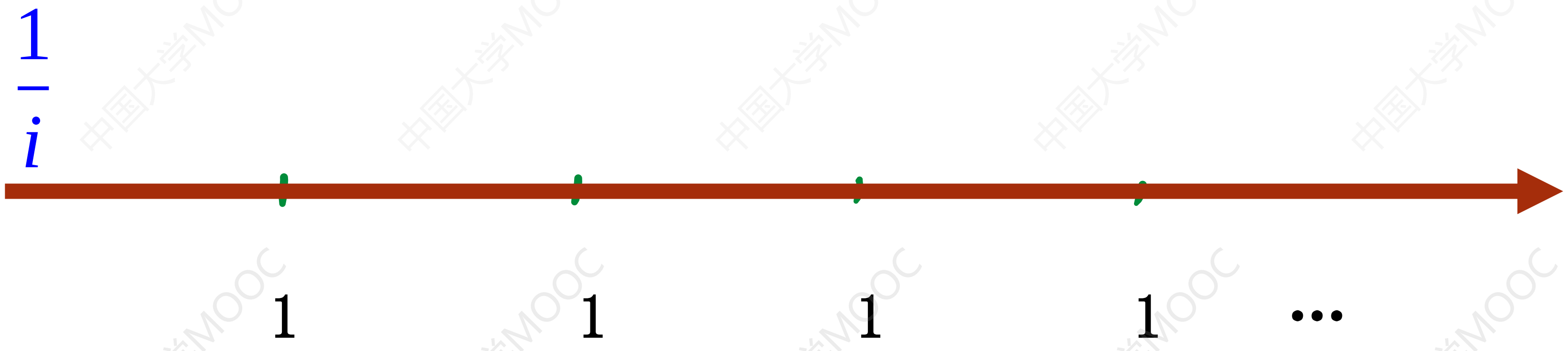
$${}_{m|}a_{\overline{n}|} = a_{\overline{m+n}|} - a_{\overline{m}|}$$

例： 年金共有7次付款，每次支付1元，分别在第3年末到第9年末。求年金的现值和在第12年末的积累值。



永续年金

- 含义：无限期支付的年金
- 期末付： $a_{\overline{\infty}|} = \lim\limits_{n\to\infty} a_{\overline{n}|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1-v^n}{i} = \dfrac{1}{i}$
- 解释：将本金 $1/i$ 按利率 i 无限期投资，每期获得1元利息



- 期初付永续年金的现值： $\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \dfrac{1}{d}$

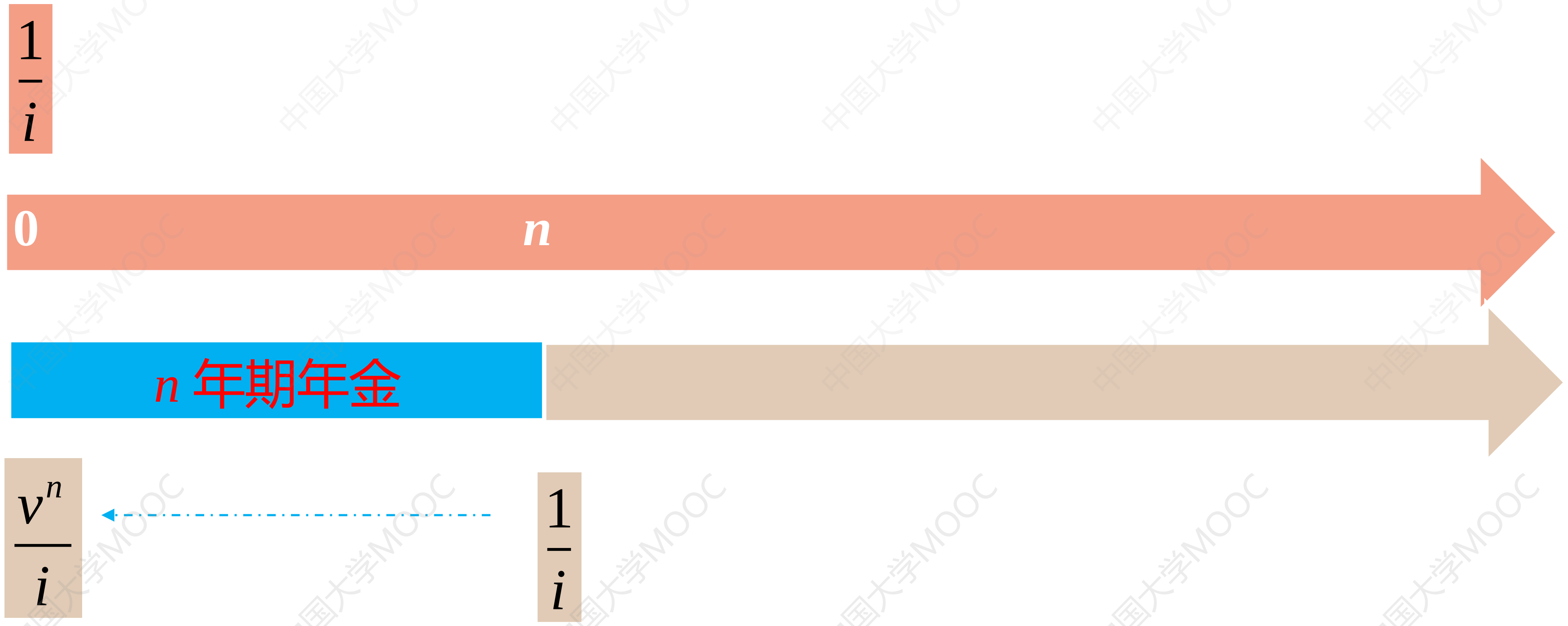
$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = (1+i)\,a_{\overline{\infty}|}$$

$$= (1+i)\frac{1}{i}$$

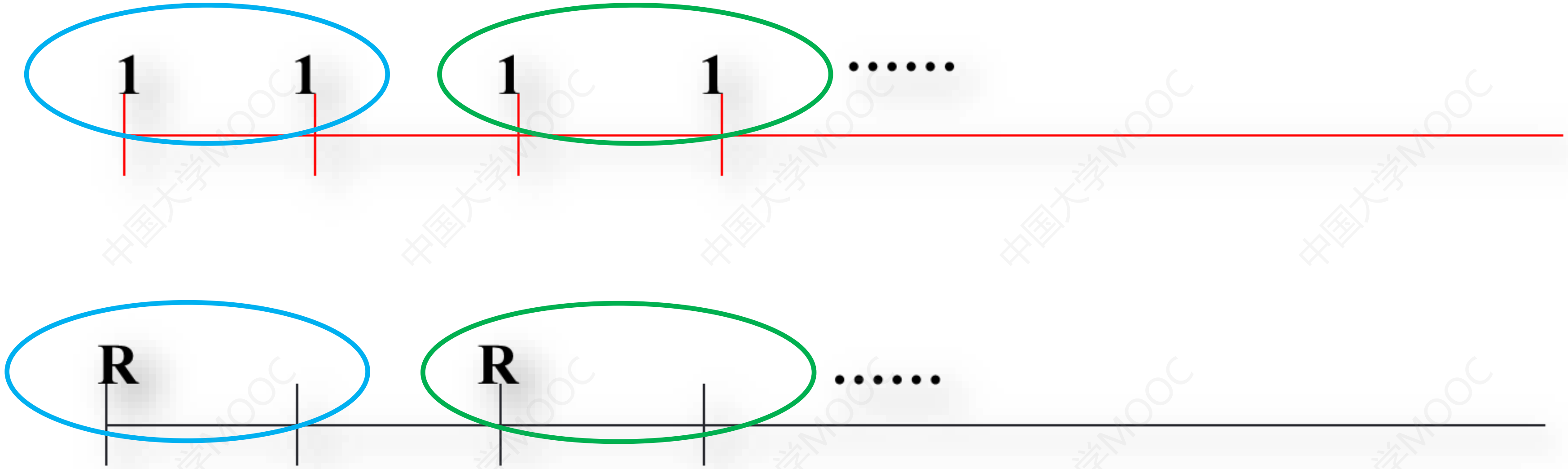
$$= \frac{1}{d}$$

例：n 年期年金 = 两个永续年金之差

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1}{i} - \frac{v^n}{i}$$



例：每年初支付1元的永续年金的现值是20，如果将该年金转换为一个每2年初支付R的永续年金，且两个永续年金的现值相等。计算R。



$$R = 1 + (1 - d) = 2 - d \qquad 1/d = 20$$

参考答案2

$$\frac{1}{d} = 20$$

两年期的实际贴现率D为：

$$1 - D = (1 - d)^2 \quad \Rightarrow \quad D = 1 - (1 - 1/20)^2$$

故新的永续年金的现值为

$$\frac{R}{D} = 20 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{39}{20}$$

例： 一笔10万元的遗产，年收益率为7%

- 第一个10年将每年的利息付给受益人A，
- 第二个10年将每年的利息付给受益人B，
- 二十年后将每年的利息付给受益人C。
- 确定三个受益者的相对受益比例。

A： $7000a_{\overline{10|}}$

B：$7000a_{\overline{10|}}v^{10}$

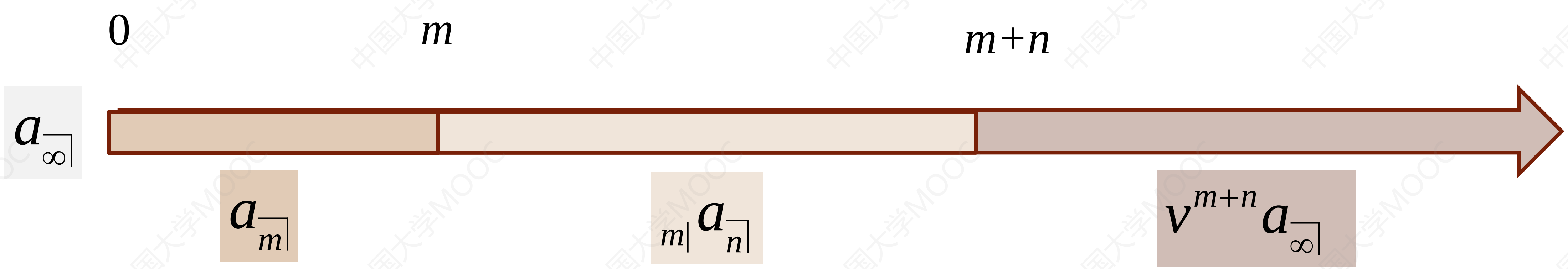
C：$7000a_{\overline{\infty|}}v^{20}$

解：10万元每年产生的利息是7000元。

- A所占的份额是 $7000a_{\overline{10}|} = 49165$
- B所占的份额是 $7000a_{\overline{10}|}v^{10} = 24993$
- C所占的份额是 $7000a_{\overline{\infty}|}v^{20} = 25842$

A、B、C受益比例近似为49%，25%和26%。

例：解释为何成立 $a_{\overline{\infty|}} = a_{\overline{m|}} + {}_{m|}a_{\overline{n|}} + v^{m+n} a_{\overline{\infty|}}$



- **练习：A, B, C, D分享一个期末付永续年金。A 获得第一个 *n* 次付款，B 获得随后的 2*n* 次付款, C 获得第 3*n* + 1,…, 5*n*次付款，D 获得后期的所有付款。假设B和D的现值相等。计算A, B, C, D的现值之比。**

n $3n$ $5n$

$A:\ a_{\overline{n}|}$ $B:\ a_{\overline{2n}|}v^{n}$ $C:\ a_{\overline{2n}|}v^{3n}$ $D:\ a_{\overline{\infty}|}v^{5n}$

参考答案：

$$A: \frac{1-v^n}{i}$$

$$B: \frac{v^n}{i}(1-v^{2n})$$

$$C: \frac{v^{3n}-v^{5n}}{i}$$

$$D: \frac{v^{5n}}{i}$$

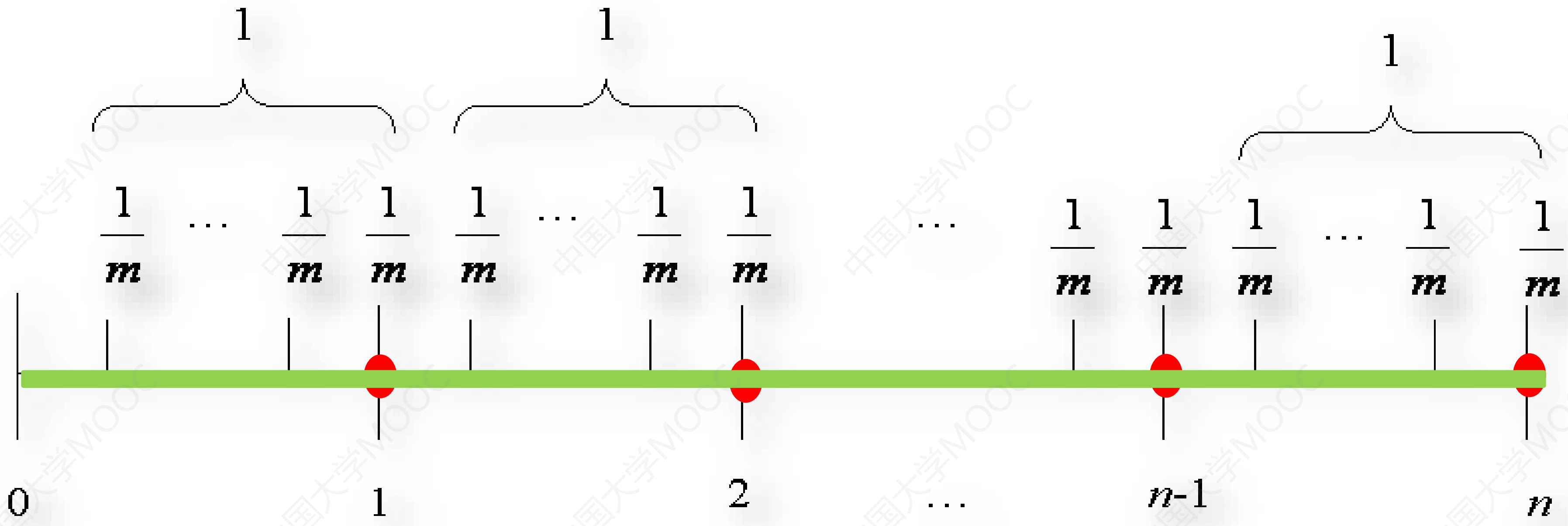
B = D $\Rightarrow$ $$\frac{v^n}{i}\cdot(1-v^{2n})=\frac{v^{5n}}{i}$$

$$v^n=0.78615$$

A:B:C:D = (1 – v^n) : (v^n – v^{3n}): (v^{3n} – v^{5n}): (v^{5n})

= 0.2138 : 0.3003 : 0.1856 : 0.3003

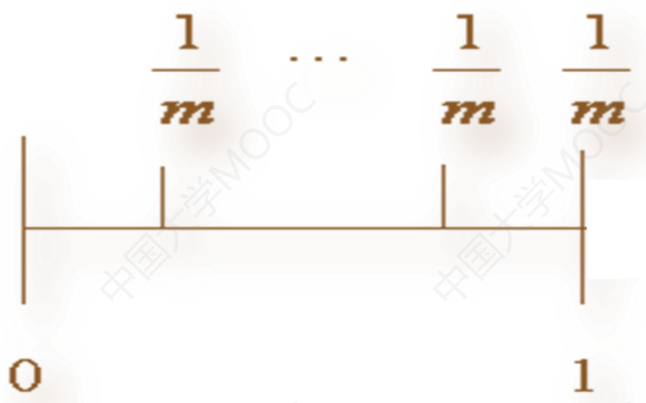
每年支付 m 次的期末付年金



$a_{\overline{n}|}^{(m)}$

$s_{\overline{n}|}^{(m)}$

例：将1年等分为m个区间，每个区间末支付1/m，累积值为 $\dfrac{i}{i^{(m)}}$



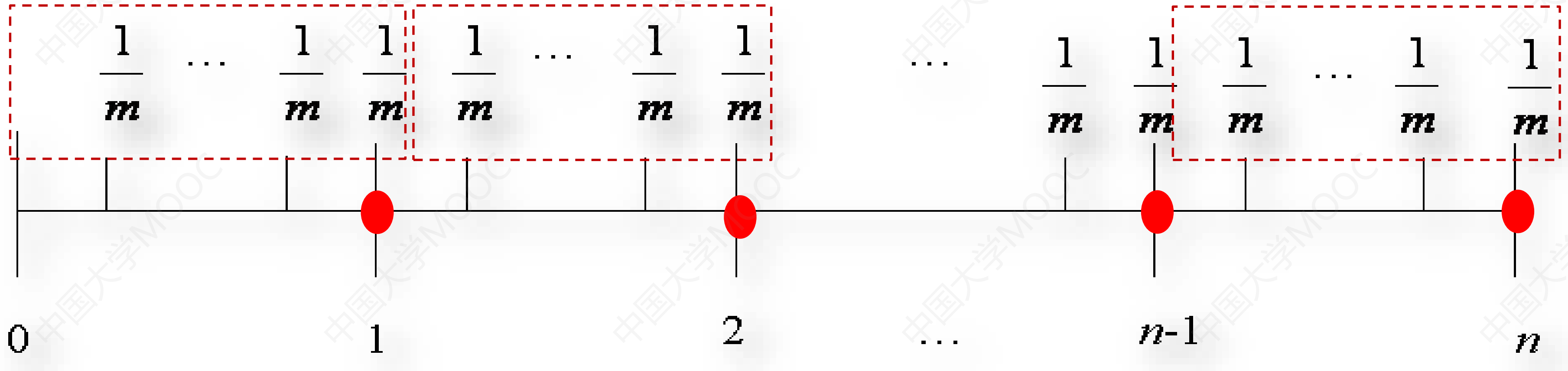
$$\frac{1}{m} s_{\overline{m}|j} = \frac{1}{m} \frac{(1+j)^m - 1}{j}$$

$$= \frac{(1+i)-1}{mj}$$

$$= \frac{i}{i^{(m)}}$$

- 每个区间的长度为1/m年
- 每个区间末的付款为1/m元
- 每个区间的有效利率为j
- 年名义利率为 $i^{(m)} = m\ j$

每年支付 *m* 次的期末付年金的现值



$$a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|}$$

$$\frac{i}{i^{(m)}} \qquad \frac{i}{i^{(m)}} \qquad \frac{i}{i^{(m)}}$$

每年支付 m 次的期末付年金的终值

$$s_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^n a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} s_{\overline{n}|}$$

例：每月末支付400，持续支付10年的现值？

如果每年末支付一次，每次 12*400 元，现值为： $12\times 400\times a_{\overline{10}|}$

改为每月末支付一次，每次支付400 元，现值为： $12\times 400\times a_{\overline{10}|}\times \frac{i}{i^{(12)}}$

例：每季度末支付200，持续支付5年的现值？

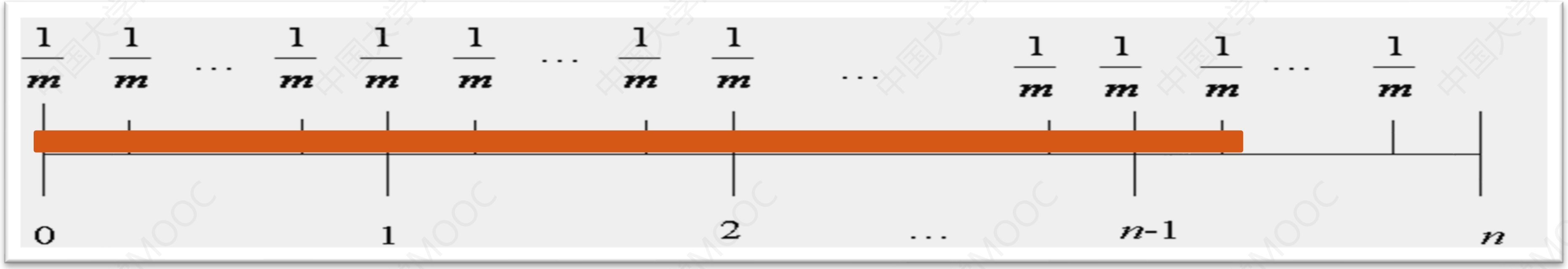
如果每年末支付一次，每次 4*200 元，现值为：　$4\times 200\times a_{\overline{5}|}$

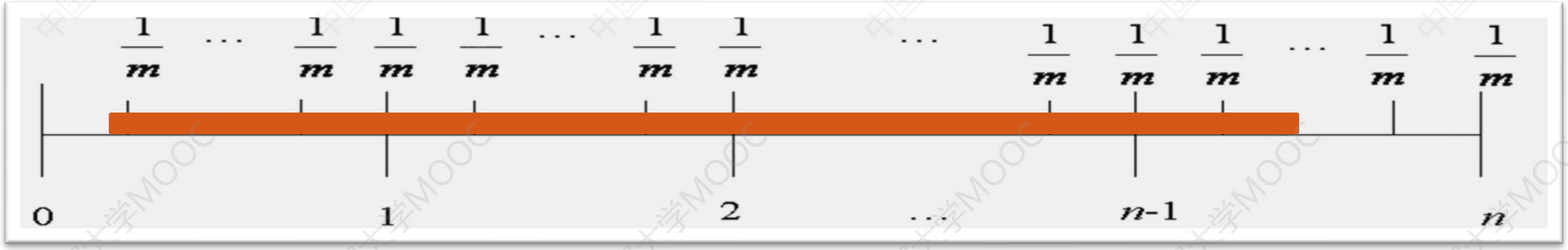
改为每季末支付一次，每次支付200 元，现值为：　$4\times 200\times a_{\overline{5}|}\times \frac{i}{i^{(4)}}$

每年支付 *m* 次的期初付年金的现值

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

证明见下页





每年支付 m 次的期初付年金的现值

$$\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} a_{\overline{n}|}^{(m)} = (1+i)^{\frac{1}{m}} \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|}$$

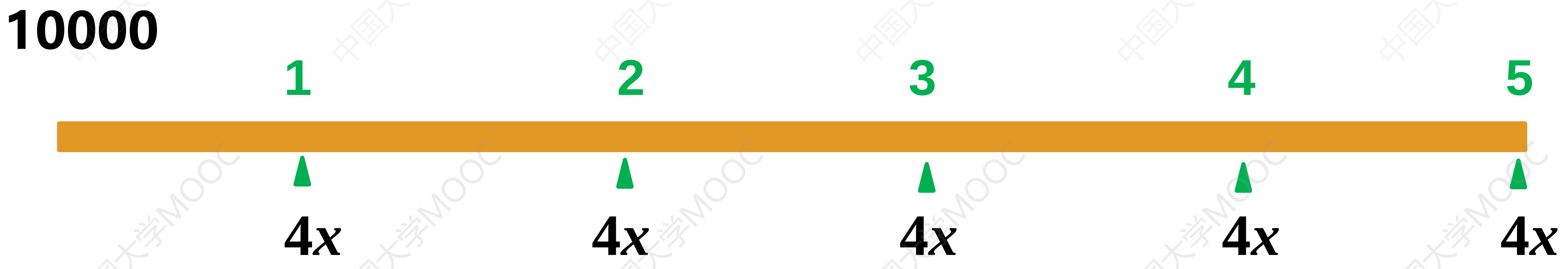
$$= \frac{i}{(1+i)^{-\frac{1}{m}} i^{(m)}} a_{\overline{n}|} = \frac{i}{d^{(m)}} a_{\overline{n}|}$$

$$= \frac{i/(1+i)}{d^{(m)}} (1+i) a_{\overline{n}|} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

例： 投资者向一基金存入10000元，基金的年利率为5%。如果投资者在今后的5年内每个季度末从基金领取一笔等额收入，则基金在第5年末的价值为零。计算该投资者每次可以领取多少。

解： 若每年末领取4x，现值为 $4x \cdot a_{\overline{5}|}$ ，改为每季度领取 x，现值为

$$4x \cdot a_{\overline{5}|} \cdot \frac{i}{i^{(4)}} = 10000$$



$$4x \cdot a_{\overline{5}|} \cdot \frac{i}{i^{(4)}} = 10000$$

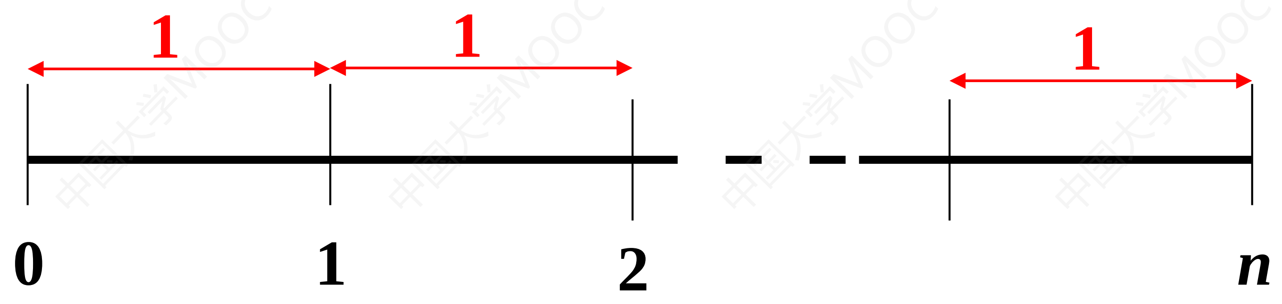
$$x = 2500 \div \left(\frac{i}{i^{(4)}} a_{\overline{5}|} \right) = 566.92 \text{（元）}$$

应用EXCEL计算（参见MOOC视频）

	A	B	C
1	$x = 2500 \div \left(\frac{i}{i^{(4)}} a_{\overline{5}|} \right) = 566.92$ (元)		
2	实际利率		
3	名义利率		
4	现值因子		
5	领取额		
6			

连续支付的等额年金

- 含义：连续付款，每年的付款总量为1元。
- 记号：$\bar{a}_{\overline{n}|}$ $\bar{s}_{\overline{n}|}$



- 连续支付年金 = 年支付次数m趋于无穷大

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \lim_{m\to\infty} a_{\overline{n}|}^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n}|}$$

$$= \frac{1-v^n}{\delta}$$

连续支付年金的现值（另一种方法）：考虑时间区间（t，$t+\mathrm{d}t$），

因为年付款为1，故区间（t， $t+\mathrm{d}t$）的付款为 $\mathrm{d}t$，其现值为 $v^t\mathrm{d}t$

$$\bar{a}_{\overline{n}|} = \int_0^n v^t \mathrm{d}t = \left.\frac{v^t}{\ln v}\right|_0^n = \frac{1-v^n}{\delta}$$

例：连续支付，每年的支付总量为1，支付期限为无穷的现值。

$$\bar{a}_{\overline{\infty}|} = \lim_{n\to\infty} \bar{a}_{\overline{n}|}$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1-v^n}{\delta}$$

$$= \frac{1}{\delta}$$

连续支付年金的累积值：考虑时间区间（t，$t+\mathrm{d}t$）

区间（t，$t+\mathrm{d}t$）内的付款为 $\mathrm{d}t$，其终值为 $(1+i)^{n-t}\mathrm{d}t$

$$\bar{s}_{\overline{n}|} = \int_0^n (1+i)^{n-t}\mathrm{d}t = -\int_0^n (1+i)^{n-t}\mathrm{d}(n-t)$$

$$= -\left.\frac{(1+i)^{n-t}}{\ln(1+i)}\right|_0^n = \frac{(1+i)^n - 1}{\delta}$$

例：年金在时间区间[2, 5]内连续支付，每年的付款额为300元，计算该年金的现值。假设年利率为5%。

解：

在区间（t, t + dt）的付款额为300dt，现值为$v^t 300\mathrm{d}t$　故有

$$\mathrm{PV} = \int_2^5 300 v^t \mathrm{d}t = 300 \left. \frac{v^t}{\ln v} \right|_2^5 = \frac{300}{\ln v}(v^5 - v^2) = 759.4$$

例：年金在时间区间[2, 5]内连续支付，每年的付款额为300元，计算该年金的现值。假设利息力为 $\delta(t) = 1/(1+t)$ 。

解：

$$PV = \int_2^5 300e^{-\int_0^t (1+s)^{-1}ds} dt = \int_2^5 300e^{-\ln(1+s)\big|_0^t} dt = 207.94$$

练习：年金在时间区间[2, 5]内连续支付，每年的付款额为300元，计算该年金在 t = 3 时的价值。假设利息力为 $\delta(t) = 1/(1+t)$ 。

价值方程

如何计算年金的价值？付款次数*n*，利率*i*

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$$

例：投资者在每年初向基金存入1万元，当年利率为多少时，在第20年末可以累积到30万元？

$$\ddot{s}_{\overline{20}|j} = 30$$

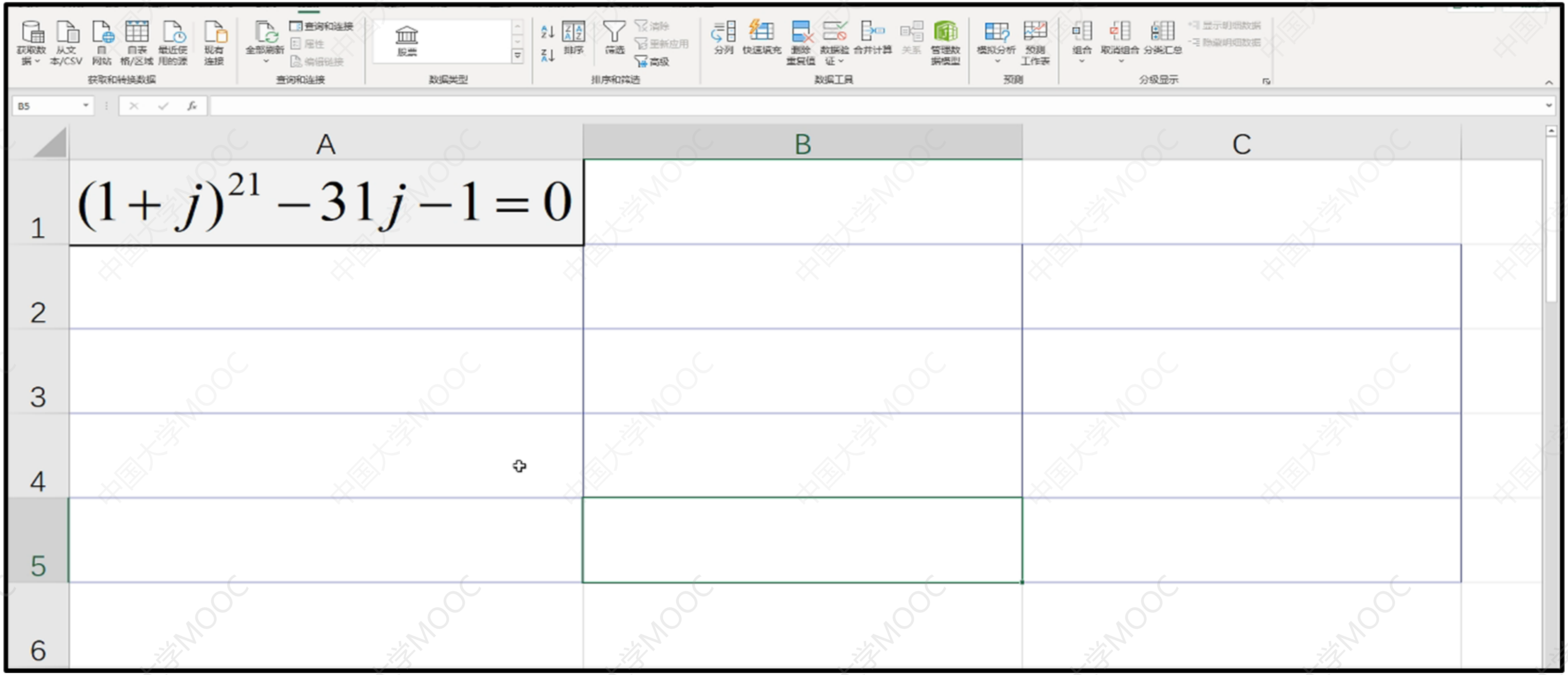
$$\ddot{s}_{\overline{20|}j} = 30$$

$$\Rightarrow \frac{(1+j)^{20}-1}{j/(1+j)} = 30$$

$$\Rightarrow (1+j)^{21} - 31j - 1 = 0$$

用Excel求解即得 $j = 0.0372$

应用EXCEL求解方程（参见MOOC视频）



中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

等额年金

小结

孟生旺

等额年金

- 年金的概念和分类
- 每年支付一次的年金
- 每年支付m次的年金
- 连续支付的年金

每年支付1次的年金的价值

期末付现值

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{i}$$

终值 = 现值 × $(1+i)^n$

$$s_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

期初付 = 期末付 × $(1+i)$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1-v^n}{d}$$

$$d = \frac{i}{1+i}$$

$$\ddot{s}_{\overline{n}|} = \frac{(1+i)^n - 1}{d}$$

每年支付m次年金的价值

- 期末付 $a_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} a_{\overline{n}|}$
- 期初付 $\ddot{a}_{\overline{n}|}^{(m)} = \frac{d}{d^{(m)}} \ddot{a}_{\overline{n}|}$

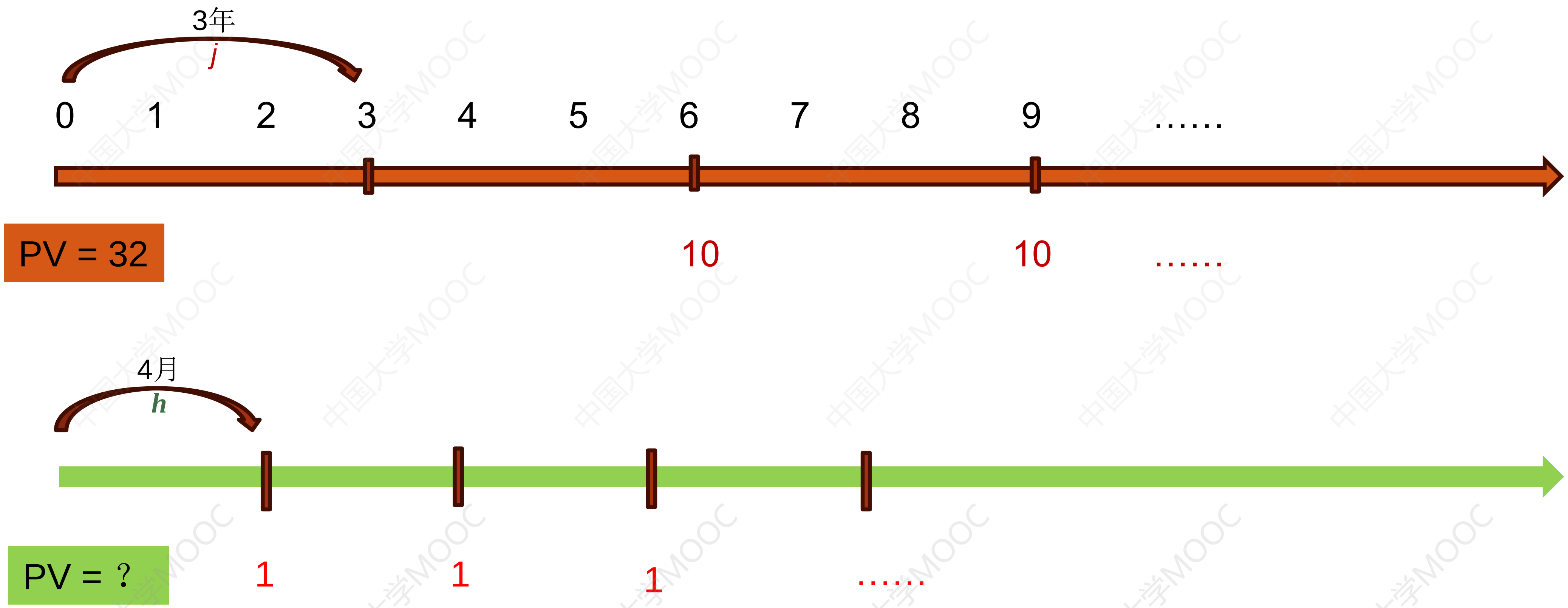
连续支付年金的价值（m → ∞）

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{i}{\delta} a_{\overline{n|}}$$

$$\bar{a}_{\overline{n|}} = \frac{d}{\delta} \ddot{a}_{\overline{n|}}$$

（两者相等）

- **练习**：假设年有效利率为 i。一项永续年金在每3年末支付10，第一次支付发生在第6年末，该永续年金的现值为32。另一项永续年金每4个月末支付1，计算其现值。



参考答案：

令 j 为 3 年期的有效利率，则

$1+j=(1+i)^3$ 　永续年金在第3年末的价值为 $10/j$

在时间0点 的价值为 $\dfrac{10}{j}\dfrac{1}{1+j}$ ，令其等于32，得 $\begin{cases} j=0.25 \\ i=(1+j)^{1/3}-1=7.72\% \end{cases}$

令 h 为每4个月的有效利率：$1+i=(1+h)^3 \Rightarrow h=2.5\%$

每4个月末支付1元的永续年金的现值为 $x=\dfrac{1}{h}=40$