中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA
统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

期 权

孟生旺

主要内容

- 期权的基本概念
- 期权的平价关系
- 期权定价模型
  - 二叉树模型
  - Black-Scholes模型（了解）
- 期权交易策略（了解）

期权的基本概念

- **期权：**买卖资产的权利。规定期限，约定价格，一定数量。
- **期权多头：**期权买方、期权持有人，获得权利。
- **期权空头：**期权卖方。根据买方要求，履行义务。
- **执行价格：**买卖资产的价格
- **期权费（期权价格）：**为了获得权利，多头向空头支付的费用

- **期权的类型：**
  - 看涨期权（call）：以执行价格买入标的资产的权利。
    - 例：在12月20日，以每股20元的价格，购买1万股A公司的股票
    - 资产价格上涨越多，看涨期权的价值越大。
  - 看跌期权（put）：以执行价格卖出标的资产的权利。
    - 例：在12月20日，以每股30元的价格，出售1万股B公司的股票
    - 资产价格下跌越多，看跌期权的价值越大。

例：A 向 B支付150元后，有权在年底以每股22元的价格向B出售1000股股票。

问：多头？空头？标的资产？执行价格？看涨期权还是看跌期权？期权费？

例： C 向 D支付150元后，有权在年底按每股20元的价格从D购买1000股股票。

问：多头？空头？标的资产？执行价格？看涨期权还是看跌期权？期权费？

- 期权的行权方式:
  - **欧式期权：** 只能在**到期日**行使权利。
  - **美式期权：** 可在**到期前**的任何日期执行期权。

注： 美式期权的价值不低于相应欧式期权的价值。

期权的回收和盈亏

例：看涨期权多头的回收和盈亏

回收 = 120 – 105 = 15

盈亏 = 15 – 9.4 × 1.05 = 5.13

看涨期权的价格 $C = 9.4$

标的资产的价格 $S = 100$

执行价格 $K = 105$

标的资产的价格 $S_T = 120$

看涨期权多头的回收和盈亏（一般公式）：

- 回收 = $\max(0,\ S_T - K)$

练习：计算看涨期权多头的回收和盈亏

看涨期权的价格 $C = 9.4$

执行价格 $K = 105$

标的资产的价格 $S = 100$

标的资产的价格 $S_T = 100$

年有效利率 = 5%

0 1

参考答案：

回收 $= 0$

盈亏 $= 0 - 9.4 \times 1.05 = -9.87$

例：看跌期权多头的回收和盈亏

回收 $= 105 - 90 = 15$

盈亏 $= 15 - 8 \times 1.05 = 3$

看跌期权的价格 $P = 8$

执行价格 $K = 105$

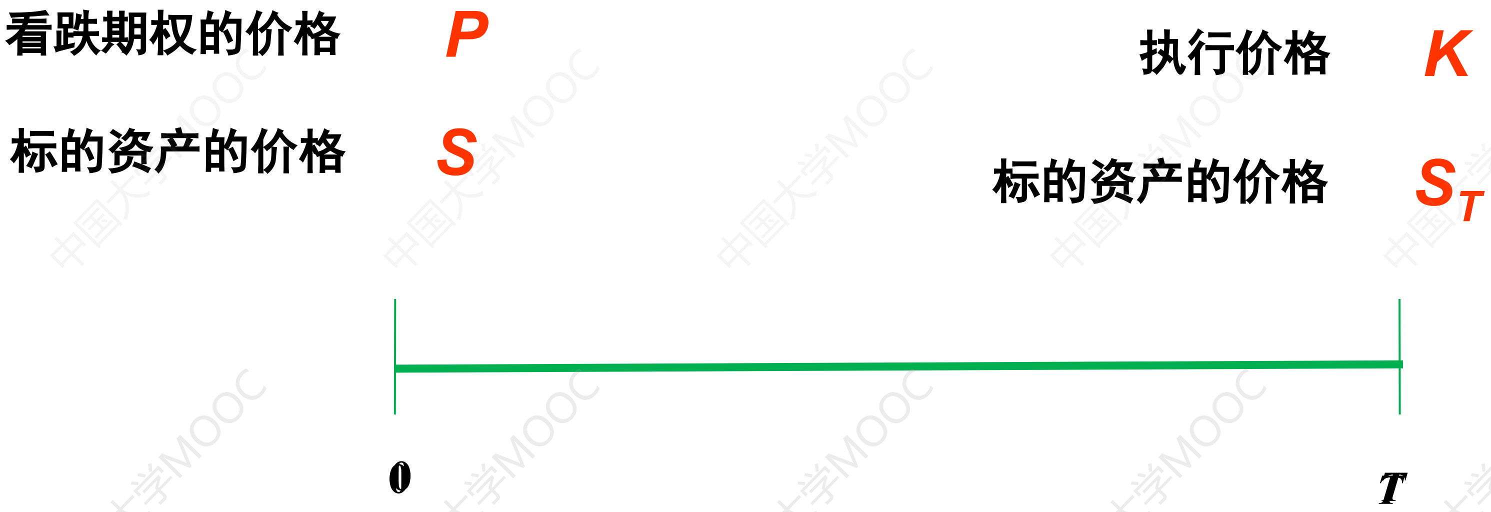
标的资产的价格 $S = 100$

标的资产的价格 $S_T = 90$

看跌期权多头的回收和盈亏（一般公式）：

回收 ＝ $\max(0,\ K - S_T)$

盈亏 ＝ 回收 － 期权费的终值



练习：计算看跌期权多头的回收和盈亏

看跌期权的价格 $C = 8$

执行价格 $K = 105$

标的资产的价格 $S = 100$

标的资产的价格 $S_T = 110$

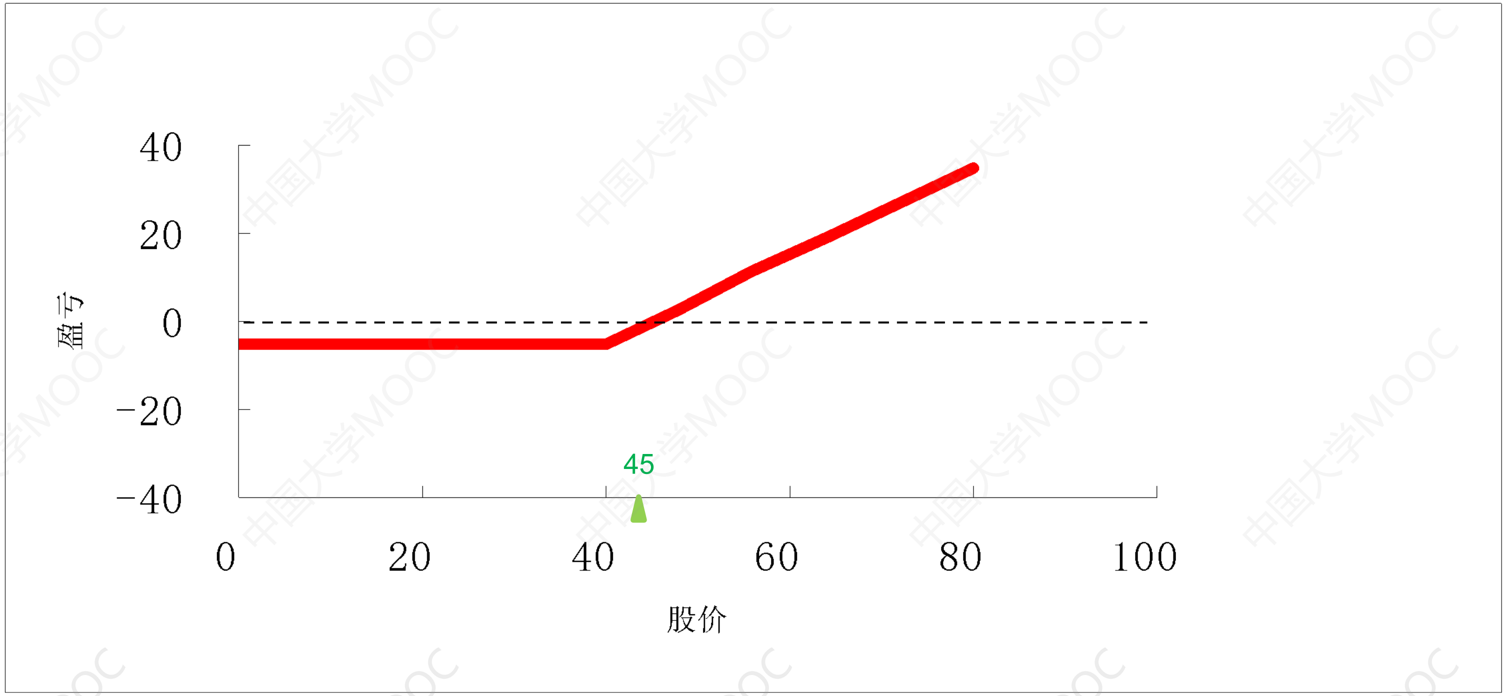
参考答案：

回收 = 0

盈亏 = 0 – 8 × 1.05 = – 12

看涨期权多头的盈亏

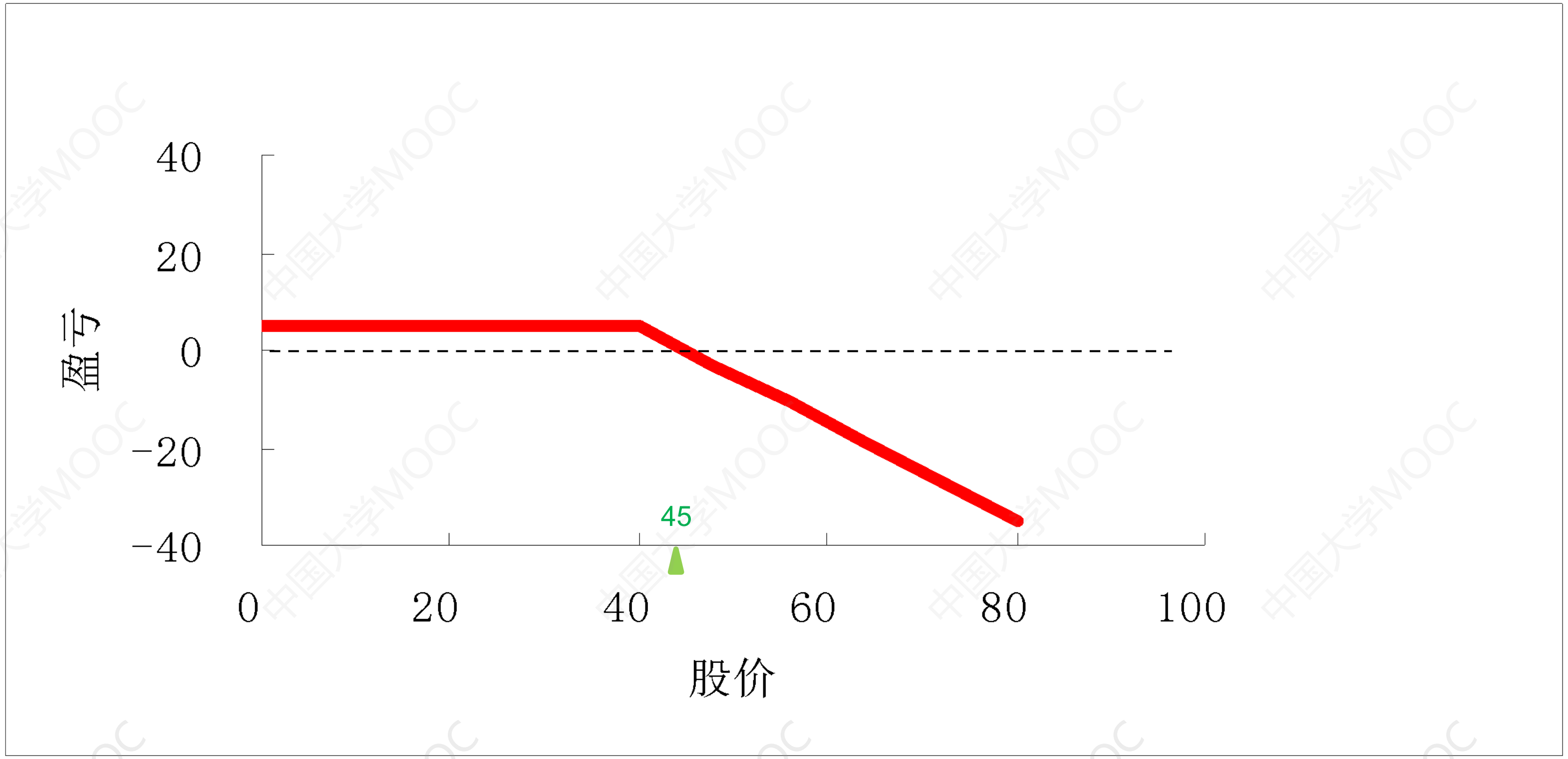
（执行价格为$K = 40$，期权费的终值为5）



盈亏平衡点 = 45

看涨期权空头的盈亏

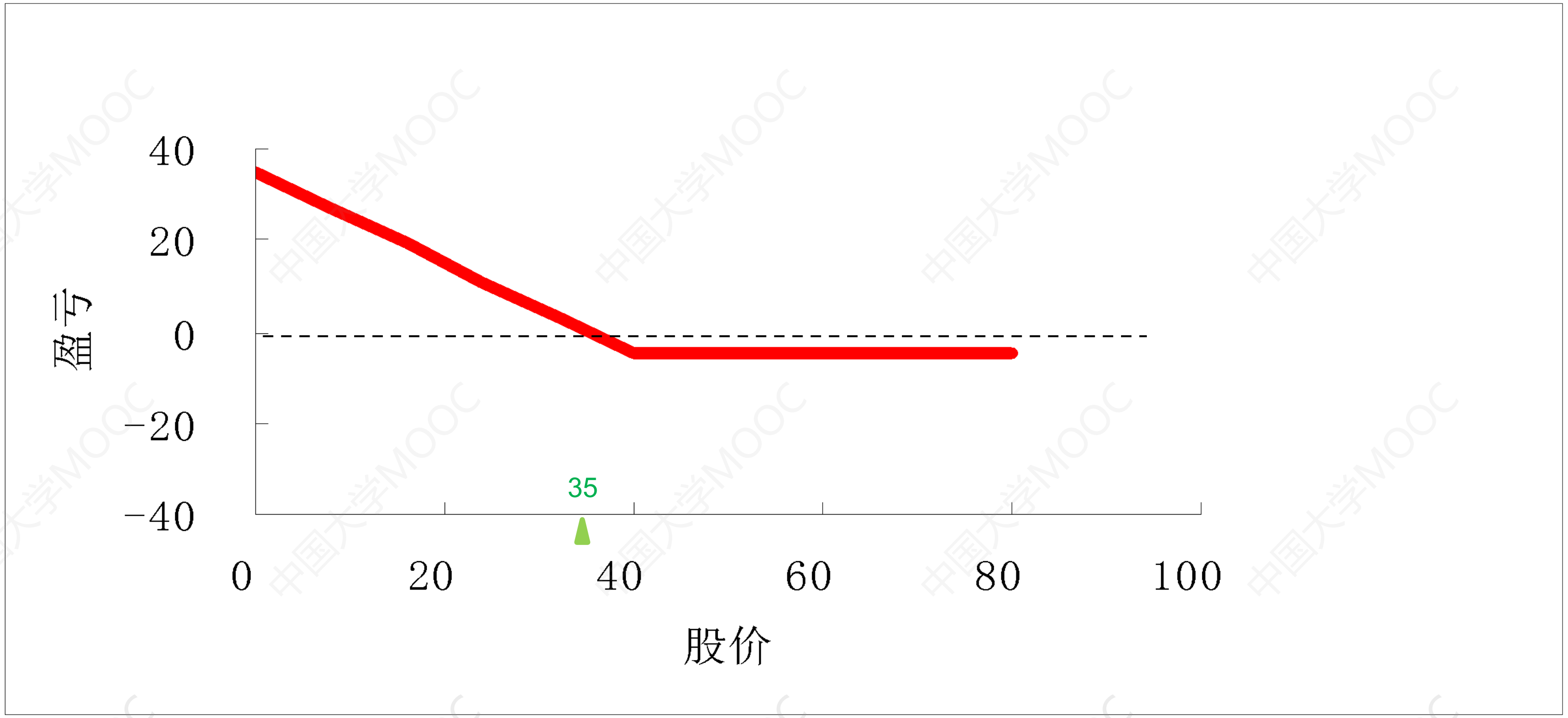
（执行价格为$K = 40$，期权费的终值为5）



盈亏平衡点 = 45

看跌期权多头的盈亏

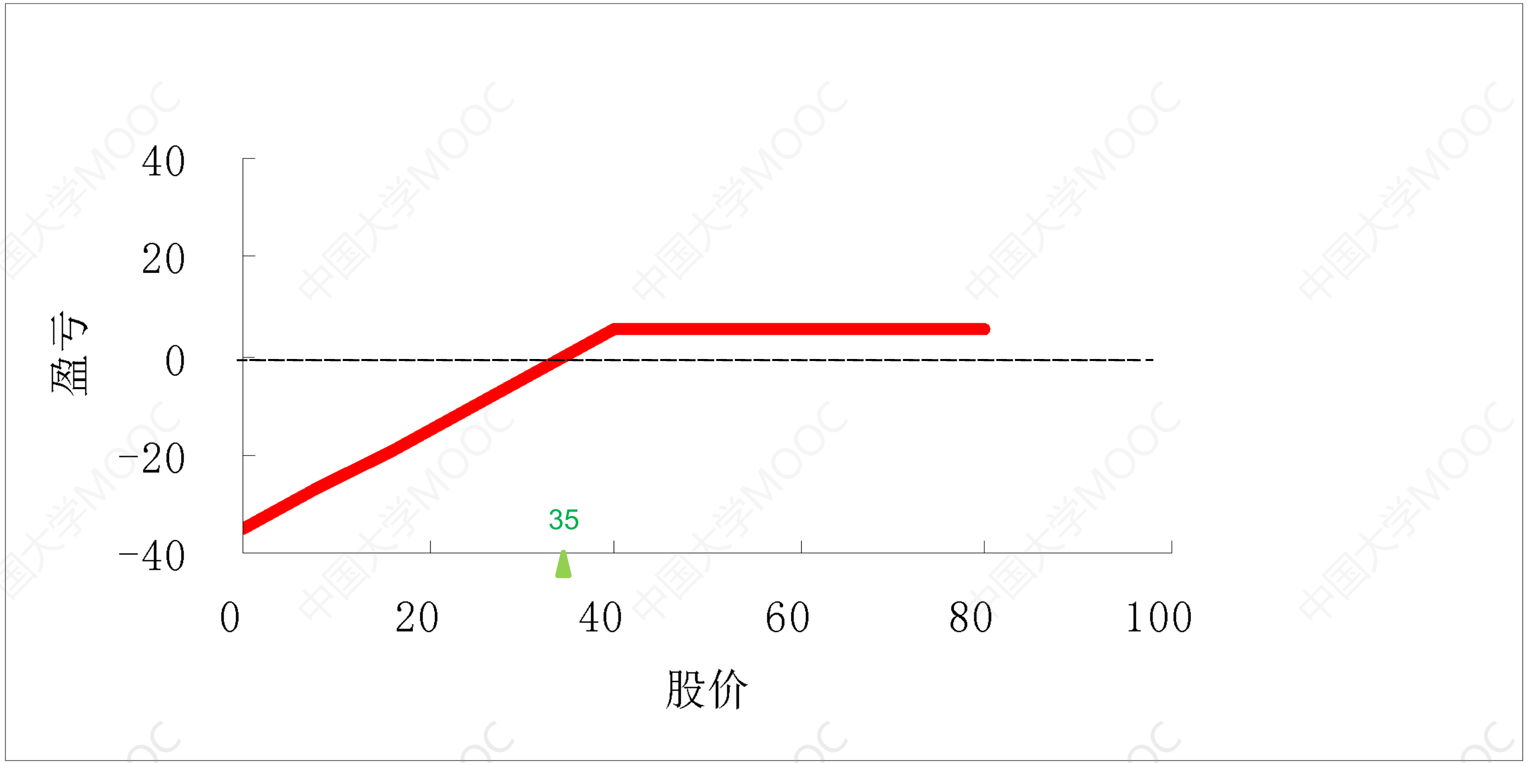
（执行价格为K=40，期权费的终值为5）



盈亏平衡点 = 35

看跌期权空头的盈亏

（执行价格为*K*＝40，期权费的终值为5）



盈亏平衡点 = 35

基于回收对期权的另一种分类（以看涨期权为例）：

- **实值期权**：立即行权，产生大于零的回收（未必是大于零的盈亏）

  市场价格 > 执行价格

- **虚值期权**

  市场价格 < 执行价格

- **平价期权**

  市场价格 = 执行价格

欧式期权的平价关系（Parity）

$$C - P = S - Ke^{-rT}$$

看涨期权的价格　C

看跌期权的价格　P

标的资产的价格　S

执行价格　K

标的资产的价格　S_T

r = 无风险连续复利

0　　　　T

- 两个投资组合：

  A：欧式看涨期权（C）＋ 现金 Ke^{-rT}

  B：欧式看跌期权（P）＋单位股票（无红利）。

- 在时间T，两个组合的价值相等：

  若 $S_T > K$：

  A：执行看涨期权，支付K，得股票

  B：看跌期权价值为零，剩股票

  若 $S_T < K$：

  A：不执行看涨期权，剩现金 K

  B：执行看跌期权，股票按 K 出售，得现金

- 根据无套利假设，这两个组合当前的价值也相等：

  A：欧式看涨期权（C）+ 现金 Ke^{-rT}

  B：欧式看跌期权（P）+ 单位股票

- 此即欧式期权的平价关系（parity）

$$C + Ke^{-rT} = P + S \Rightarrow C - P = S - Ke^{-rT}$$

对平价关系的一种解释（假设股票没有分红）

$$C-P=S-Ke^{-rT} \Rightarrow C-P=(F-K)e^{-rT}$$

$$F>K \quad \Rightarrow \quad C>P$$

股票红利对平价关系的影响

假设在期权有效期内，股票红利的现值为D，则欧式期权的平价关系为：

$$C + Ke^{-rT} = P + S - D$$

$$C - P = S - D - Ke^{-rT}$$

$S - D$ 是不含红利的股票价格。

美式看涨期权

- 对于无红利的股票，美式看涨期权不会提前执行，故等价于欧式看涨期权：

$$C_{美} = C_{欧}$$

- **解释：**

（1） $S_t > K$ ， 在时刻 t 执行，损失 $T-t$ 期间的投资收益。

（2） $S_t < K$ ， 在时刻 t 执行， 意味着损失。

美式看跌期权

对于无红利的股票，美式看跌期权提前执行可能是最优的。

美式看涨期权与看跌期权的价格之差存在下述关系：

$$S-K \le C_{美}-P_{美} \le S-Ke^{-rT}$$

$$C_{欧}-P_{欧}=S-Ke^{-rT}$$

右边不等式显然：$C_{美}=C_{欧}$，$P_{美}>P_{欧}$

左边证明参见下页。

证明：$C_{美} - P_{美} \geq S - K$

考虑两个组合：

A：美式看跌期权 + 股票S；零时价值 $= P_{美} + S$

B：欧式看涨期权 + 现金K；零时价值 $= C_{欧} + K$

分两种情况讨论：

（1）美式看跌期权没有提前执行：$\begin{cases} A = \max(S_T, K) \\ B = \max(S_T - K, 0) + Ke^{rT} = \max(S_T, K) - K + Ke^{rT} \end{cases}$ A ≤ B

（2）美式看跌期权在 t 时提前执行：$\begin{cases} A = K \\ B \geqslant Ke^{rt} \end{cases}$ A ≤ B

$P_{美} + S \leqslant C_{欧} + K$ ➡ $P_{美} + S \leqslant C_{美} + K$ ➡ $S - K \leq C_{美} - P_{美}$

股票红利的影响

假设在期权有效期内，股票红利的现值为D，则欧式期权的平价关系为：

$$C_{欧} - P_{欧} = S - D - Ke^{-rT}$$

美式看涨期权和看跌期权之间的价格关系将变形为：

$$S - D - K \le C_{美} - P_{美} \le S - D - Ke^{-rT}$$

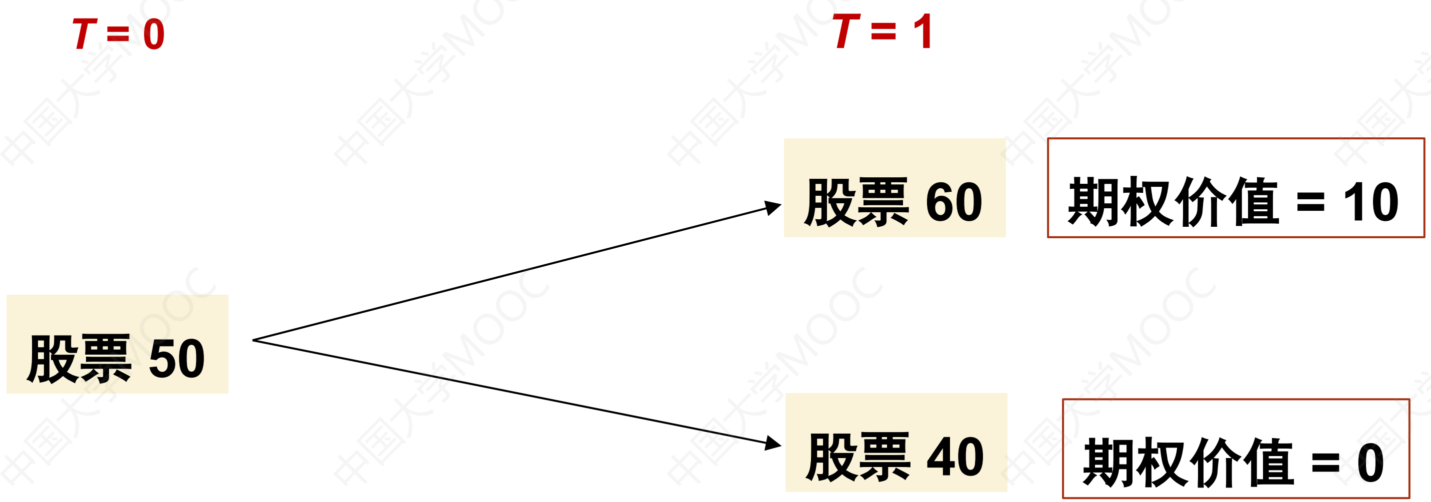
期权定价：无套利定价原理

无套利定价原理的表现形式：

- 终值相等，现值必相等
- 复制技术：组合回收 = 期权回收 $\Rightarrow$ 期权价值 = 组合价值
- 在风险中性测度下，期望收益率 = 无风险利率，故可用无风险利率贴现
- 无风险资产的收益率 = 无风险利率

例：无套利定价原理的应用

假设：股票价格只有两种变化可能，欧式看涨期权的执行价格为50



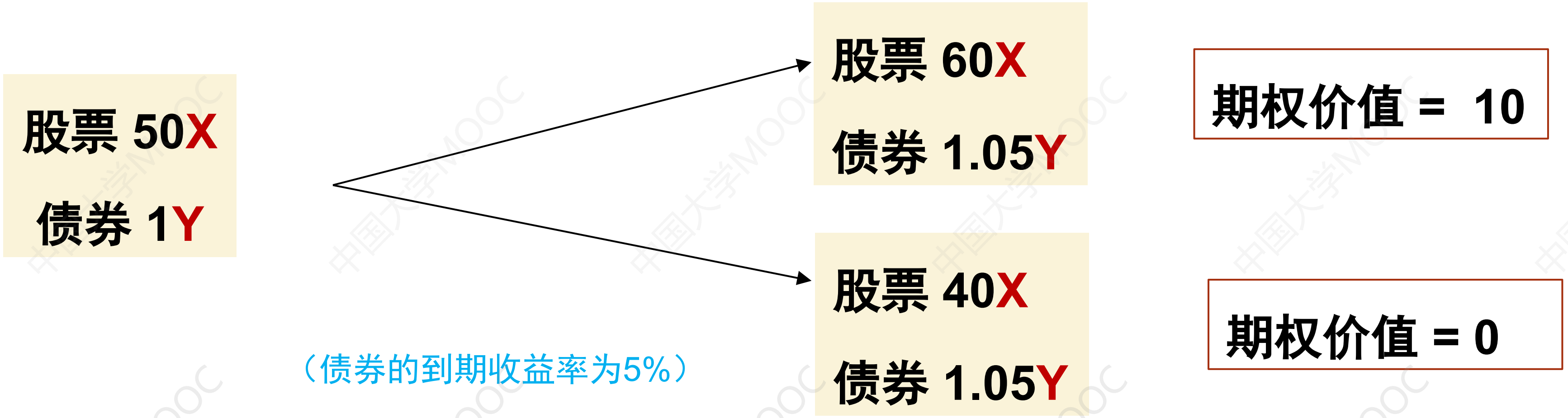
在 $T = 0$，看涨期权的价格是多少？

应用复制技术：

（1）构造一个组合，包含X单位股票和Y单位债券

（2）在$T=1$时，令组合价值 = 期权价值, 由此解出X和Y

（3）该组合在$T=0$时的价值 = 期权的价值，即为50X+Y



组合价值 = 期权价值

股票 50X
债券 1Y

股票 60X
债券 1.05Y

期权价值 = 10

$60X + 1.05Y = 10$

股票 40X
债券 1.05Y

期权价值 = 0

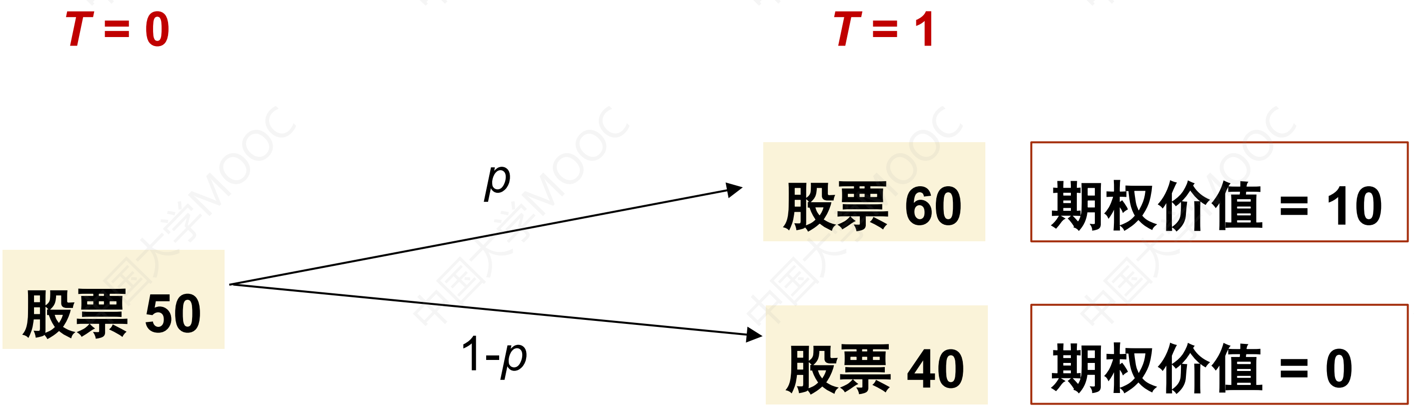
$40X + 1.05Y = 0$

$X = 0.5, \quad Y = -19.05$

组合在 $T = 0$ 时的价值即为股票看涨期权的价值：

$f = 50 \times 0.5 - 1 \times 19.05 = 5.95$

应用风险中性定价法：



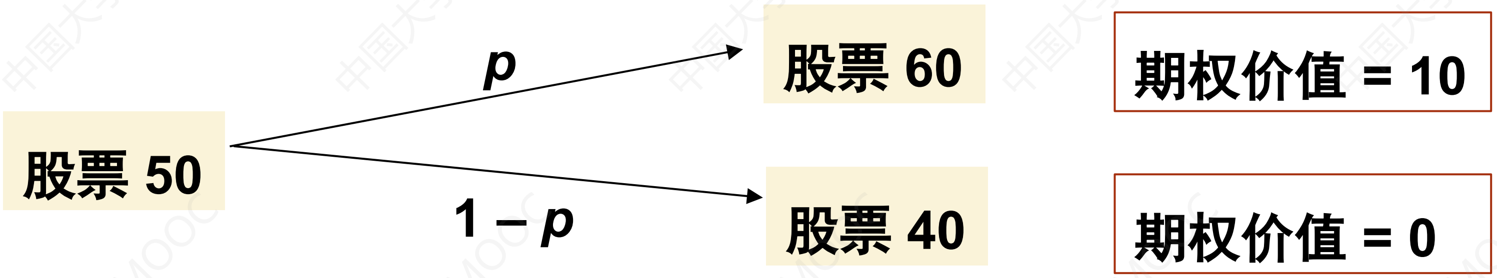
问题：期权在$T = 0$时的价值等于多少？

思路：先计算期权$T = 1$时的期望价值，再用无风险利率贴现。需要计算概率p。

求解概率 p 的方法：假设期望收益率 = 无风险利率 5%

$$\frac{60p+40(1-p)}{50}=1+5\% \Rightarrow p=0.625$$

（风险中性概率，不是现实世界的概率）

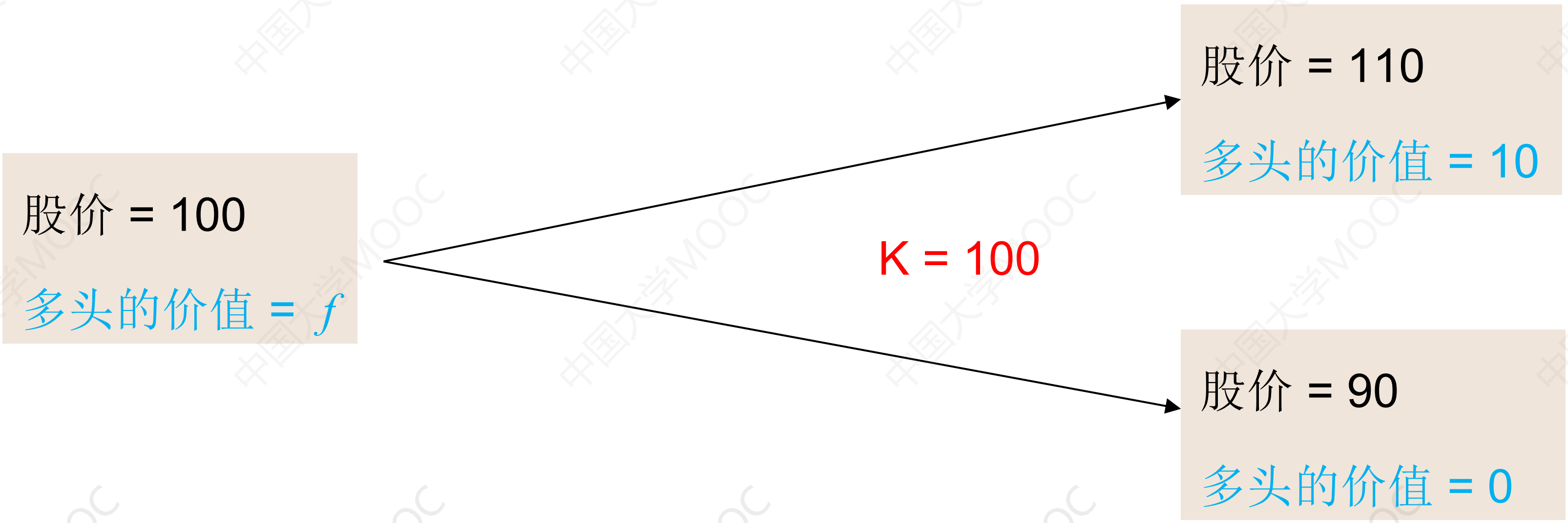


期权在 T = 1时的期望值 = 10 × 0.625 + 0 × 0.375 = 6.25

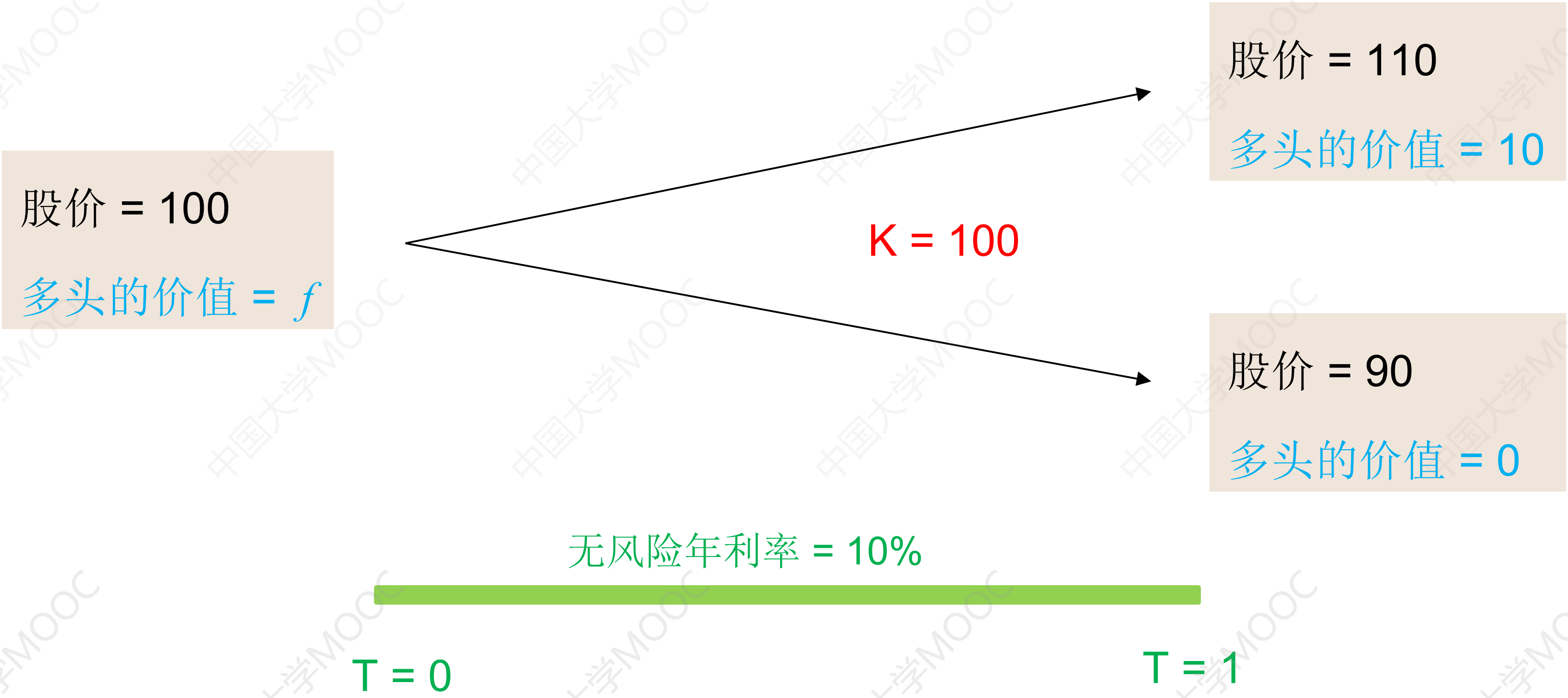
期权在 T = 0时的现值 = 6.25/1.05 = 5.95

单步二叉树模型

例：假设股票价格有两种变化可能，看涨期权的执行价格为100，求该看涨期权多头的价值。



- **无套利定价法：**
  - 构造一个无风险组合（无论股价上升还是下降，组合价值不变）
  - 无风险组合的收益率 = 无风险利率



构造无风险组合：

- 股票：w 单位
- 看涨期权空头：1单位

在股价的两种变化情况下，组合的价值应该相等： $110w - 10 = 90w$ 故 $w = 0.5$

股价 = 100

空头的价值= - f

股价 = 110

空头的价值 = -10

股价 = 90

空头的价值 = 0

K = 100

组合在起点的价值 = $100w - f$

组合到期时的价值 = $90w$ = 45

无风险组合：
股票：0.5单位
空头：1　单位

股价 = 100

空头的价值 = - f

股价 = 110

空头的价值 = -10

股价 = 90

空头的价值 = 0

T = 0　　无风险年利率 = 10%　　T = 1

组合在起点的价值 = $100 \times 0.5 - f$

组合到期时的价值 = 45

无风险组合的收益率 = 无风险利率：

$$(100 \times 0.5 - f) \times (1 + 10\%) = 45 \quad \Rightarrow \quad f = 9.09$$

单步二叉树模型的一般形式

构造无风险组合： w **单位股票，1单位看涨期权空头**

股票 $= wS$

空头 $= -f$

股票 $= wuS$

空头 $= -f_u$

股票 $= wdS$

空头 $= -f_d$

组合无风险，股价上升和下降后的价值相等

$$wuS - f_u = wdS - f_d$$

组合中股票数量：$w = \dfrac{f_u - f_d}{uS - dS}$

时间 = 0

股票 = wS

空头 = $-f$

时间 = T

股票 = wuS

空头 = $-f_u$

股票 = wdS

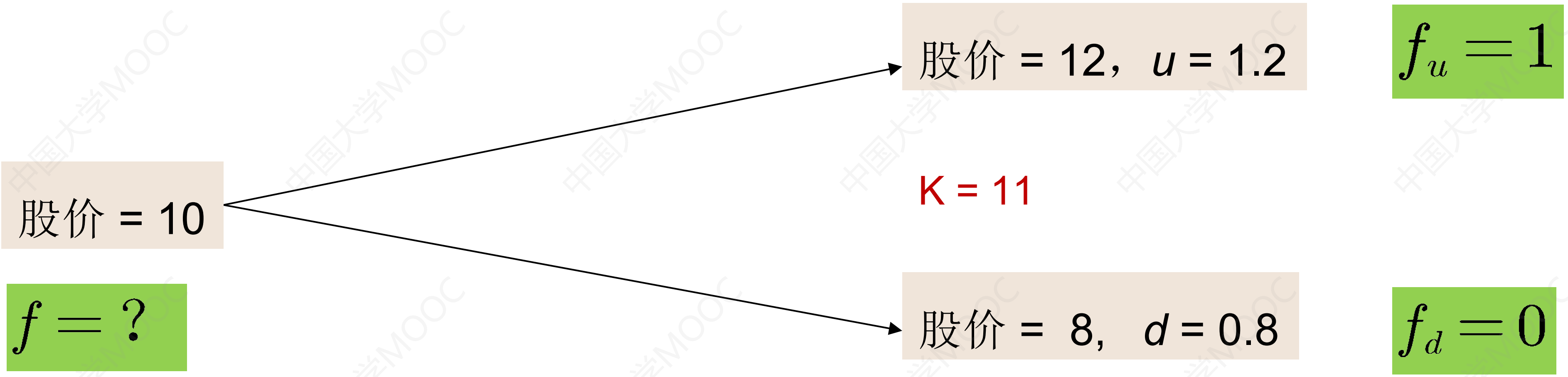
空头 = $-f_d$

无风险组合的收益率 = 无风险利率：

$$(wS - f)e^{rT} = wuS - f_u \quad \Rightarrow \quad f = e^{-rT}\left[pf_u + (1-p)f_d\right],$$

其中：$p = \dfrac{e^{rT} - d}{u - d}$

例：股票无红利，当前价格为10元。3个月以后，价格要么上升$u = 1.2$，要么下降 $d = 0.8$。该股票欧式看涨期权的期限为3个月，执行价格为11元，无风险连续复利为10%。计算期权价格。



$$f = e^{-rT}\left[pf_u + (1-p)f_d\right], \qquad p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

参考答案：

$$u = 1.2$$

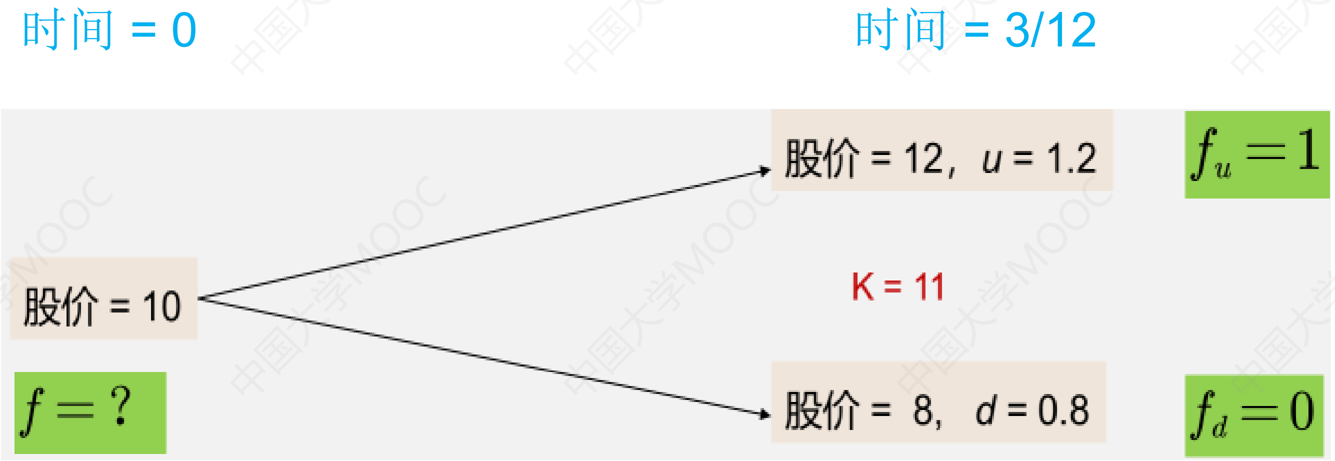
$$d = 0.8$$

$$T = 3/12$$

$$r = 10\%$$

$$p = \frac{e^{rT} - d}{u - d} = \frac{e^{0.1\times 3/12} - 0.8}{1.2 - 0.8} = 0.5633$$

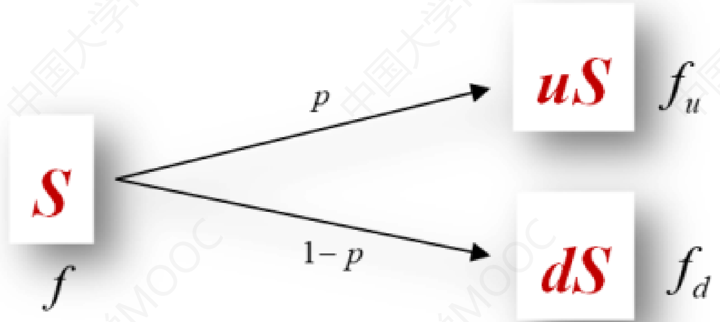
$$f = e^{-rT}\left[pf_u + (1-p)f_d\right] = 0.55$$



计算*u* 和 *d* 的一种方法（Cox，Ross和Robinstein，1979）

$$f = e^{-rT}\left[pf_u + (1-p) f_d \right] \qquad p = \frac{e^{rT} - d}{u - d}$$

$$u = e^{\sigma\sqrt{T}}, \qquad d = e^{-\sigma\sqrt{T}}$$



其中：σ 表示股票价格的年波动率（volatility），见下页说明。

用经验数据估计年波动率：

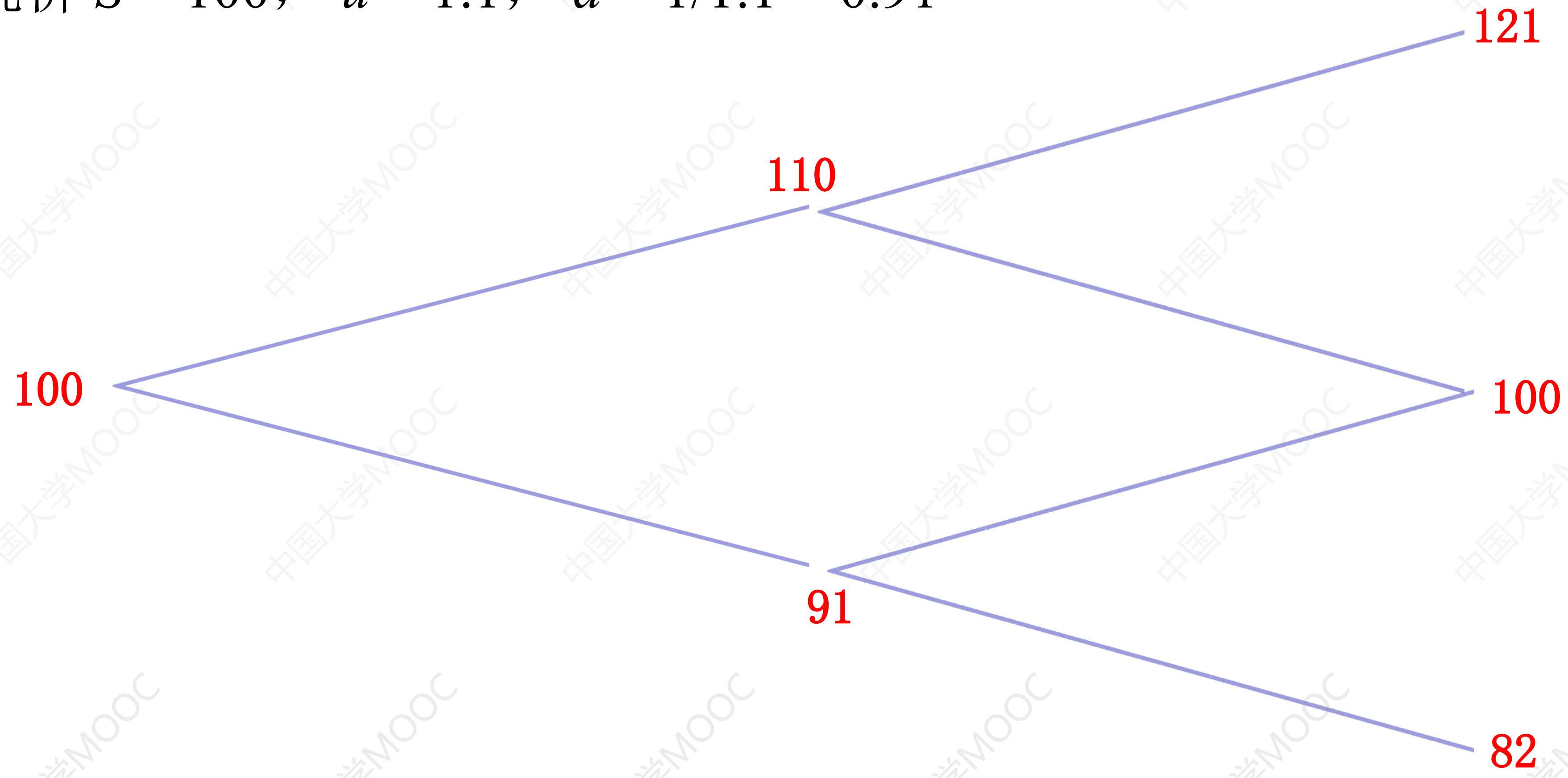
日收益率的观察值： $u_i = \log\left(\frac{S_i}{S_{i-1}}\right), \quad i = 1, 2, \ldots, n$

日波动率（日收益率的标准差）： $\hat{s} = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(u_i - \bar{u})^2}$, 其中 $\bar{u} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} u_i$

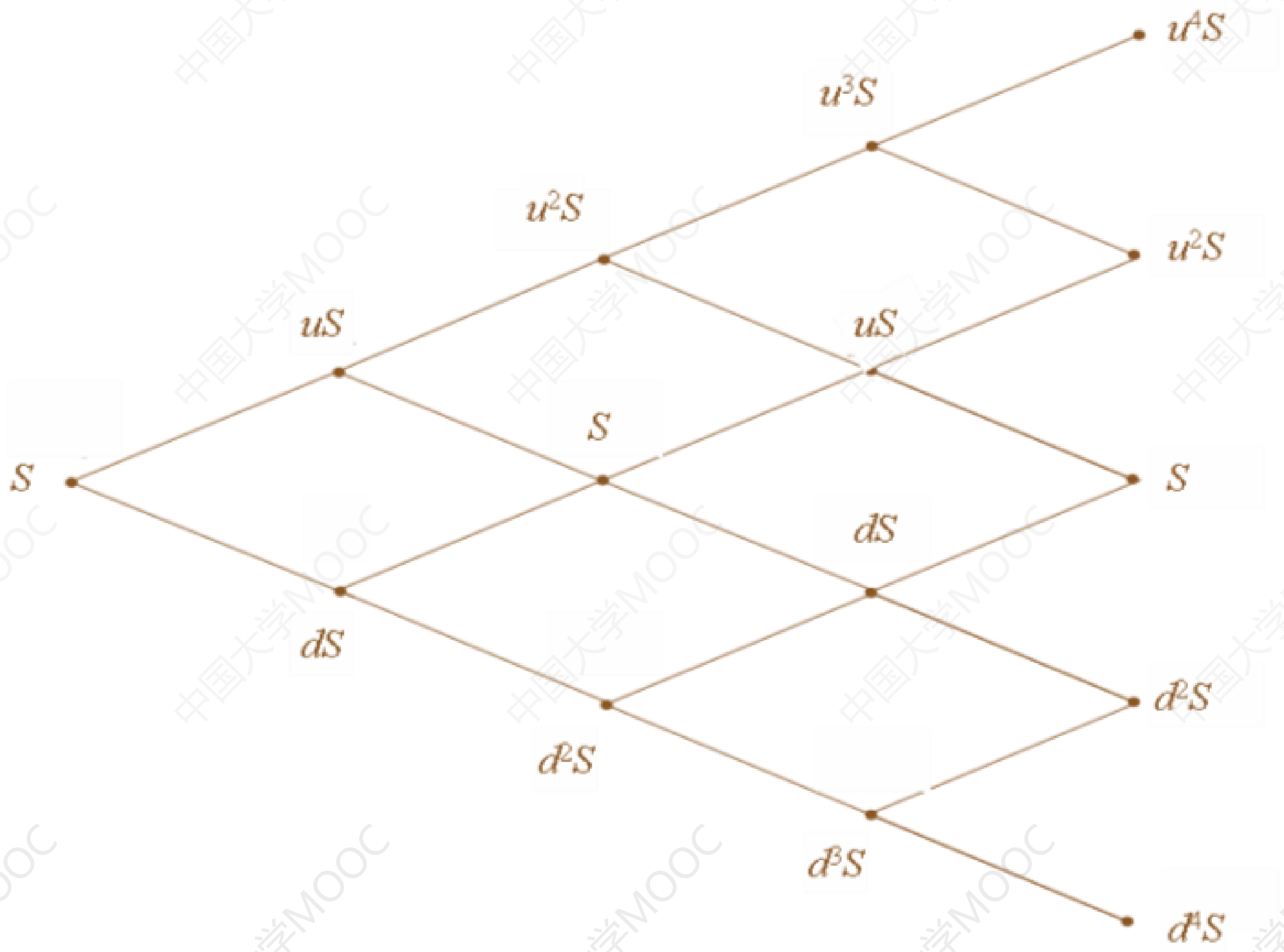
年波动率（每年252个交易日）： $\hat{\sigma} = \hat{s} \times \sqrt{252}$

•两步二叉树

例：现价 $S = 100$， $u = 1.1$， $d = 1/1.1 = 0.91$



多步二叉树



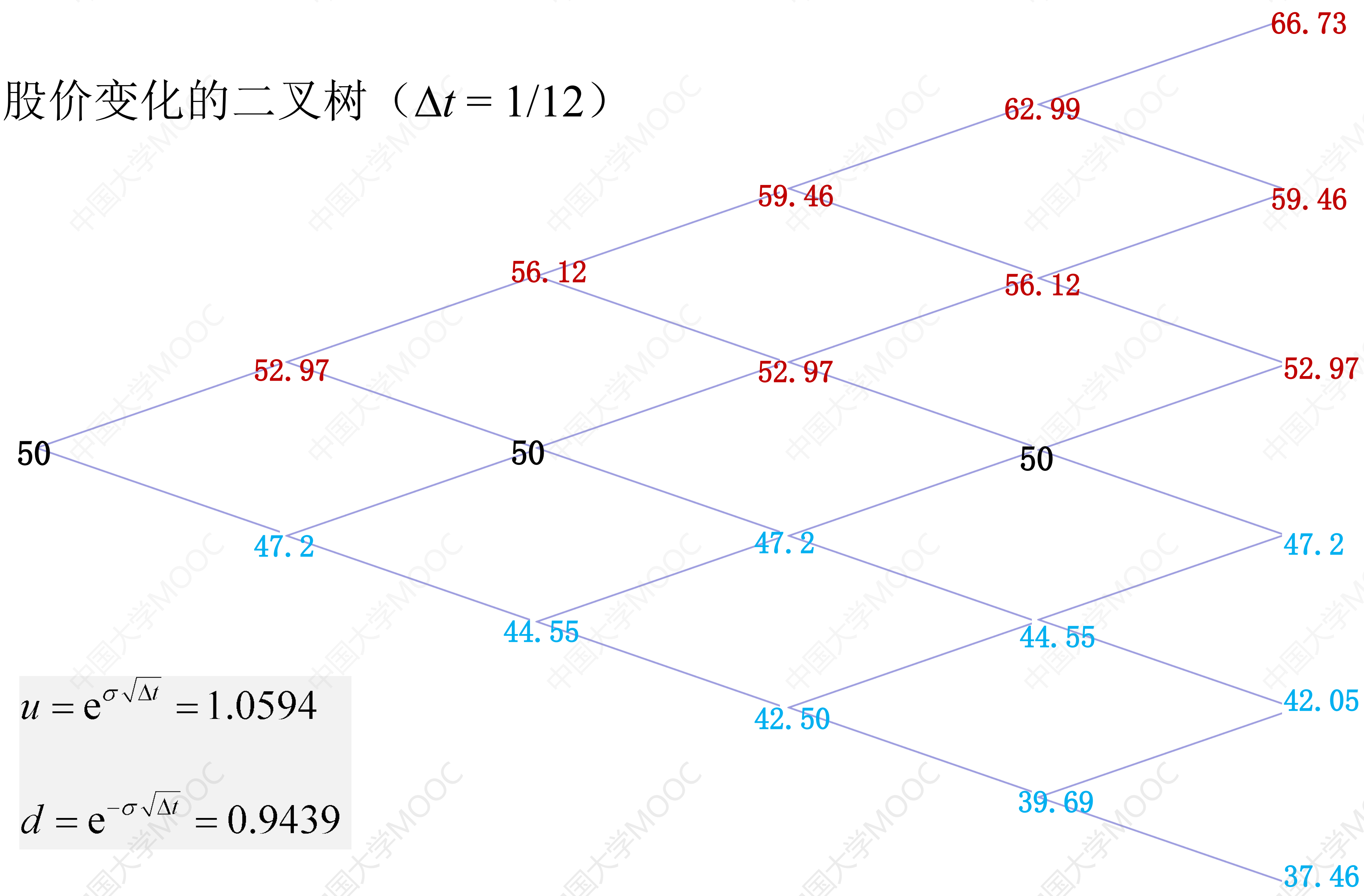
例：欧式看涨期权的二叉树定价模型

- 股票的当前市场价格为50元，无红利（$S = 50$）
- 股票价格的年波动率为20% （$\sigma = 20\%$）
- 无风险连续复利为5%（ $r = 5\%$ ）
- 该股票5个月期限的欧式看涨期权的执行价格为50元（$K = 50$）
- 用五步二叉树，求该期权的价值（$\Delta t = 1/12$ ）

$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0594$$

$$d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.9439$$

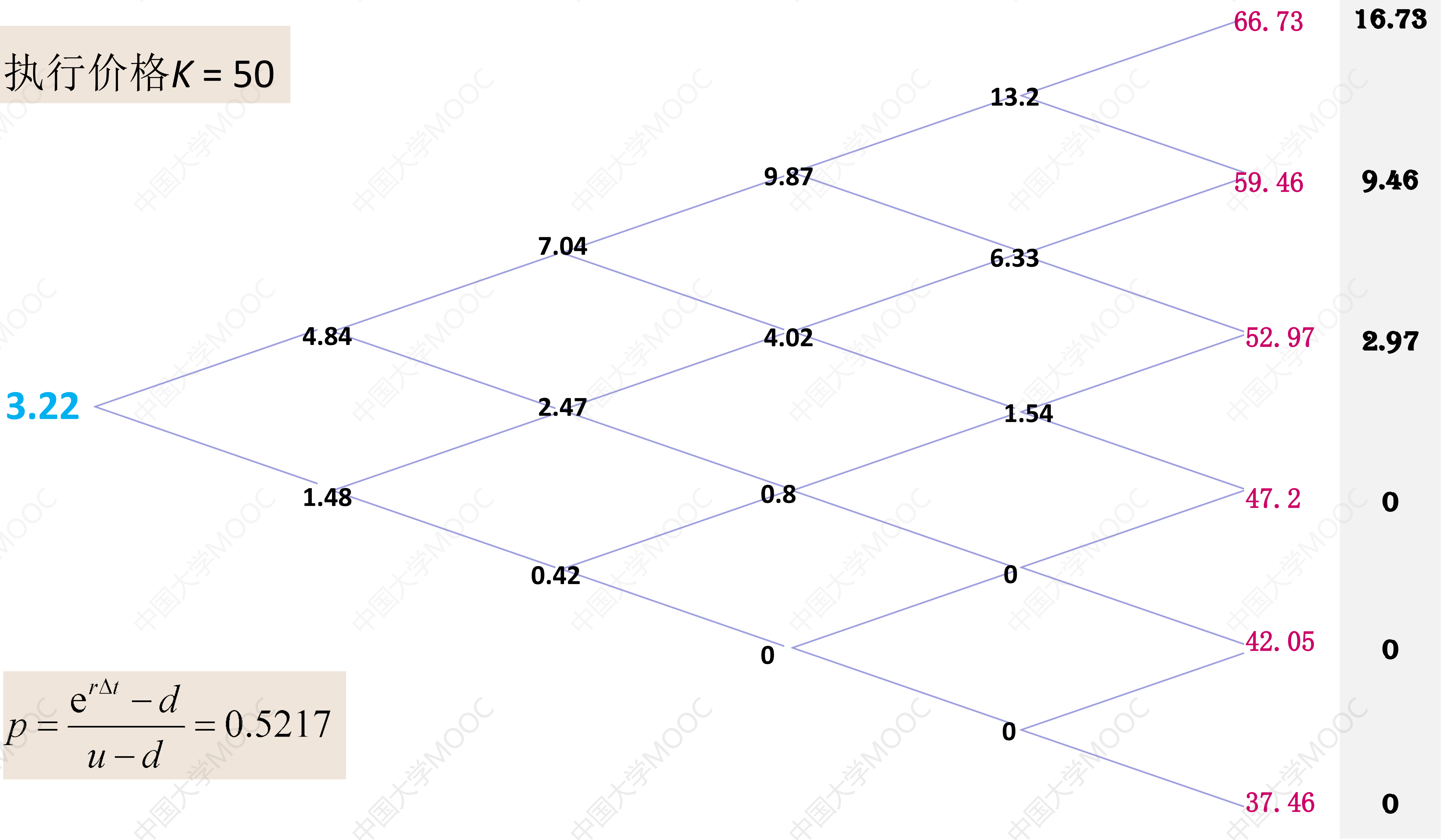
股价变化的二叉树（$\Delta t = 1/12$）



$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0594$$

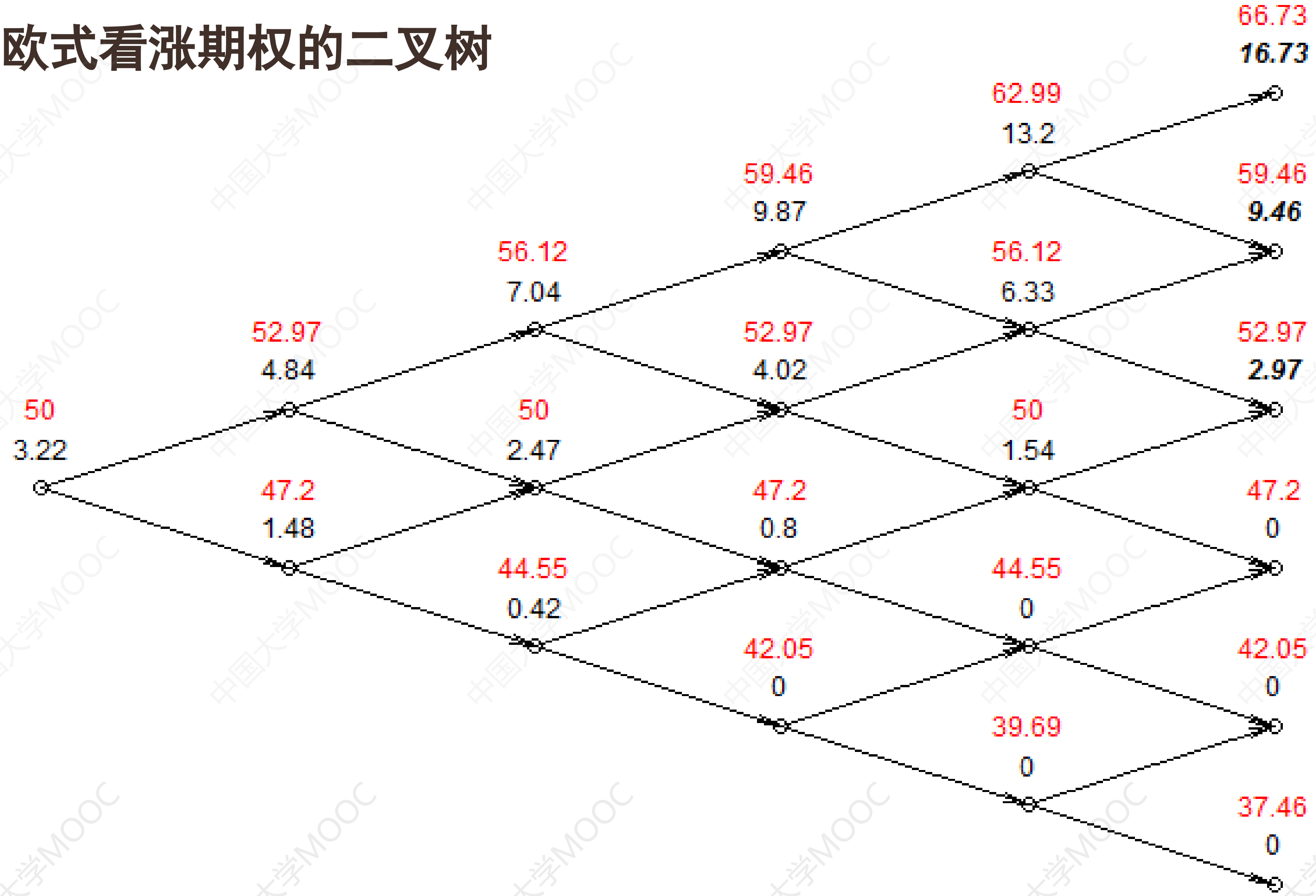
$$d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.9439$$

执行价格$K = 50$



$$p = \frac{e^{r\Delta t} - d}{u - d} = 0.5217$$

欧式看涨期权的二叉树


66.73
16.73
62.99
13.2
59.46
9.87
59.46
9.46
56.12
7.04
56.12
6.33
52.97
4.84
52.97
4.02
52.97
2.97
50
3.22
50
2.47
50
1.54
47.2
1.48
47.2
0.8
47.2
0
44.55
0.42
44.55
0
42.05
0
42.05
0
39.69
0
37.46
0

例：美式看跌期权的二叉树定价模型

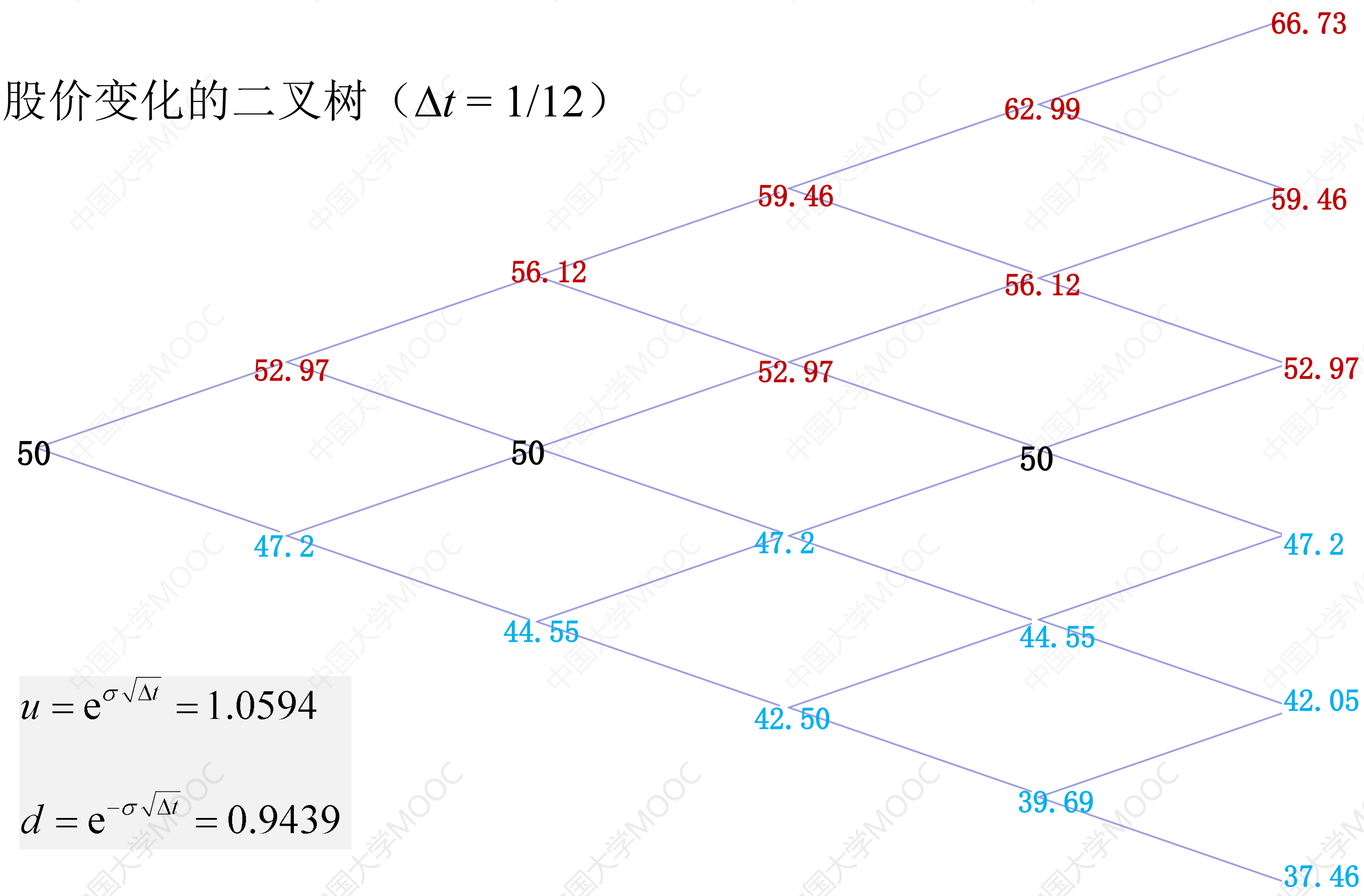
- 股票的当前市场价格为50元，无红利（$S = 50$)
- 年波动率为20% ($\sigma = 20\%$)
- 无风险连续复利为5%（ $r = 5\%$)
- 该股票5个月期的美式看跌期权的执行价格为50元（$K = 50$)
- 求该期权的价值（用五步二叉树, $\Delta t = 1/12$ ）。

$\sqrt{}$

$\sqrt{}$

$$p = \frac{e^{r\cdot\Delta t} - d}{u - d} = 0.5217$$

股价变化的二叉树（$\Delta t = 1/12$）



$$u = \mathrm{e}^{\sigma\sqrt{\Delta t}} = 1.0594$$

$$d = \mathrm{e}^{-\sigma\sqrt{\Delta t}} = 0.9439$$

美式看跌期权的价格：可能提前执行

不提前执行：$[7.95\times p+12.54\times(1-p)]e^{-0.05\times 1/12}=10.10$

提前执行： $\underset{\text{执行价格}}{50}-\underset{\text{股价}}{39.69}=10.31$

$$p=\frac{e^{r\Delta t}-d}{u-d}=0.5217$$

66.73 0

59.46 0

52.97 0

47.2 2.8

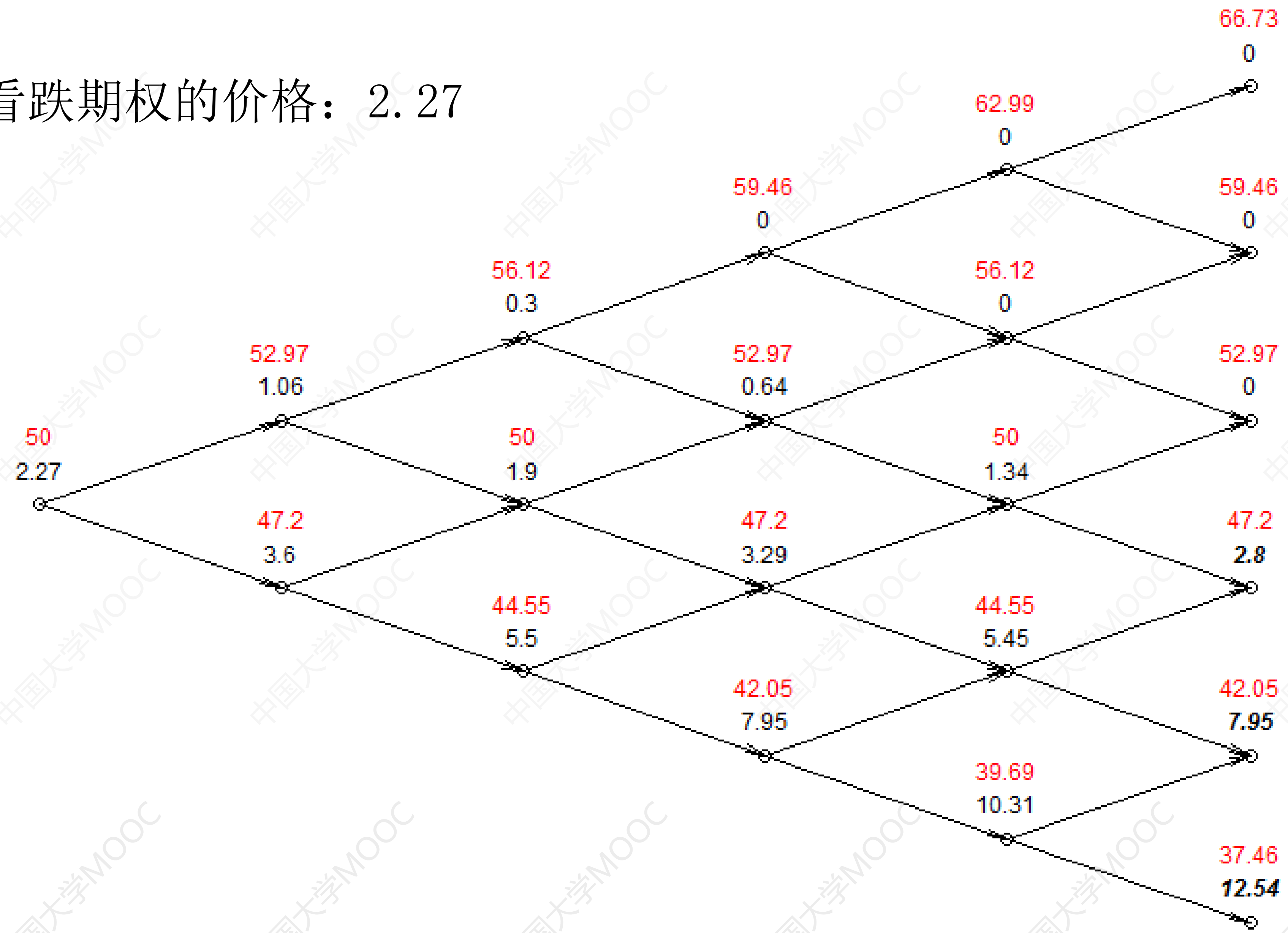
42.05 7.95

10.31

37.46 12.54

看跌期权的价值

美式看跌期权的价格：2. 27



Black-Scholes定价模型

欧式看涨期权的价格：

$$C = S \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2)$$

其中：$$d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

例： 假设

- 某种不支付红利股票的市场价格为20元
- 无风险利率为5%
- 该股票的年波动率为4%

求该股票执行价格为20元、期限为1年的欧式看涨期权和看跌期权的价格。

解：

$S=20$， $K=20$， $r=0.05$， $\sigma=0.04$， $T=1$

计算 d_1 和 d_2

$$d_1=\frac{\ln(20/20)+(0.05+0.04^2/2)\times 1}{0.04\times\sqrt{1}}=1.27$$

$$d_2=d_1-0.04\times\sqrt{1}=1.23$$

计算$\Phi(d_1)$和$\Phi(d_2)$

$$\Phi\left(d_1\right) = \Phi\left(1.27\right) = 0.8980$$

$$\Phi\left(d_2\right) = \Phi\left(1.23\right) = 0.8907$$

欧式看涨期权的价格为：

$$C = S\Phi(d_1) - Xe^{-rT}\Phi(d_2) = 20 \times 0.8980 - 20\mathrm{e}^{-0.05\times 1} \times 0.8907 = 1.0148$$

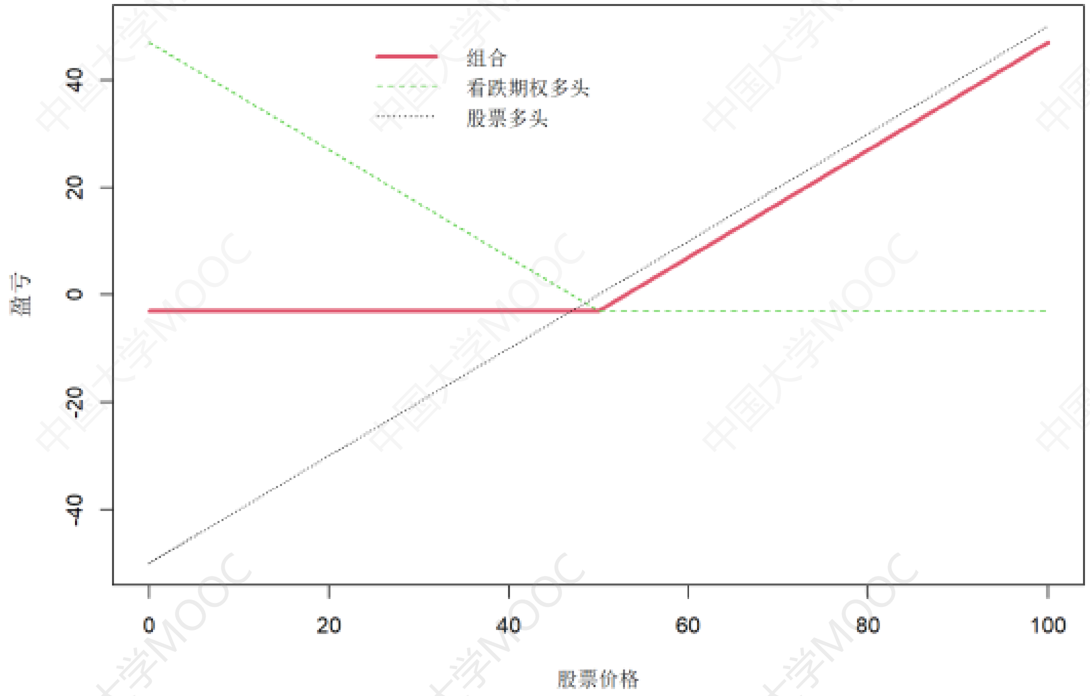
应用平价关系，看跌期权的价格为

$$P = 20 \times \left(1 - 0.8907\right)\mathrm{e}^{-0.05\times 1} - 20 \times \left(1 - 0.8980\right) = 0.0394$$

期权交易策略

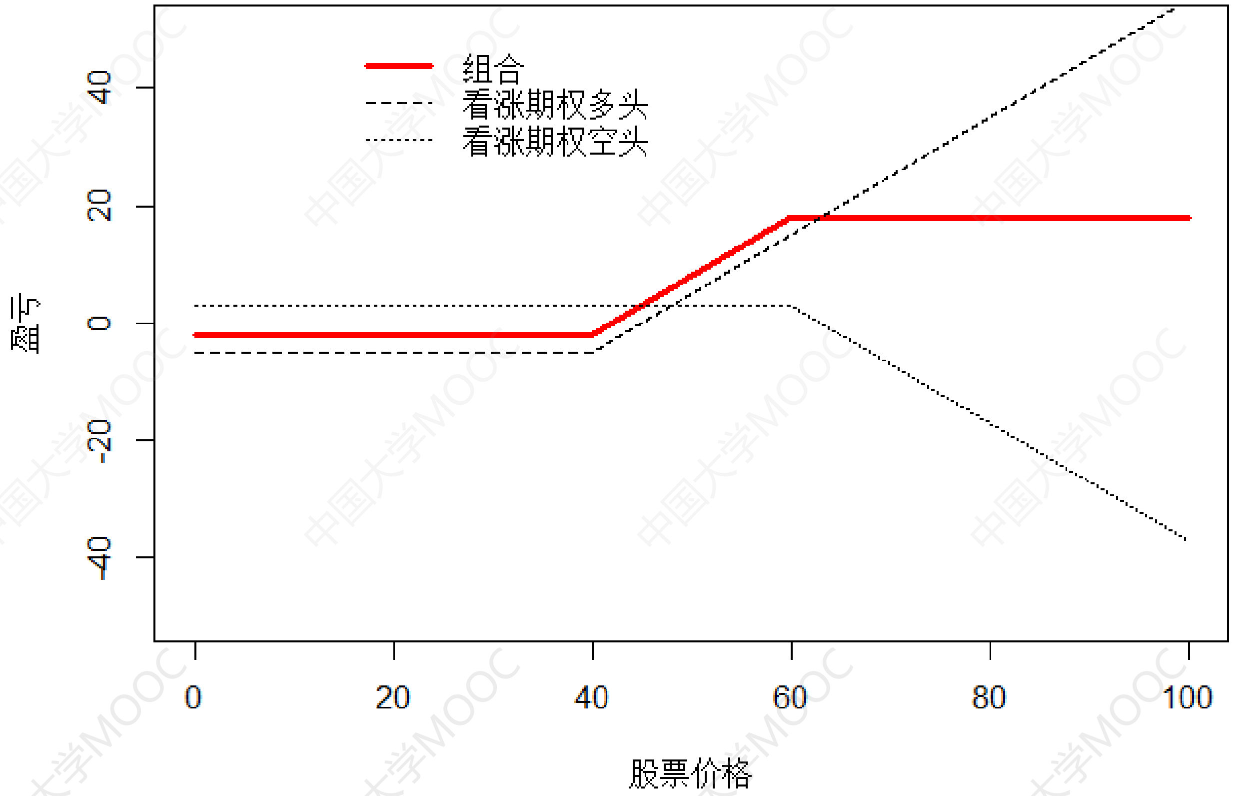
- **保险策略：**应用期权对资产进行保险。

例：为资产多头购买看跌期权，为资产价格下降的风险提供保险



- **差价期权**：由到期时间相同、执行价格不同的同类期权形成。

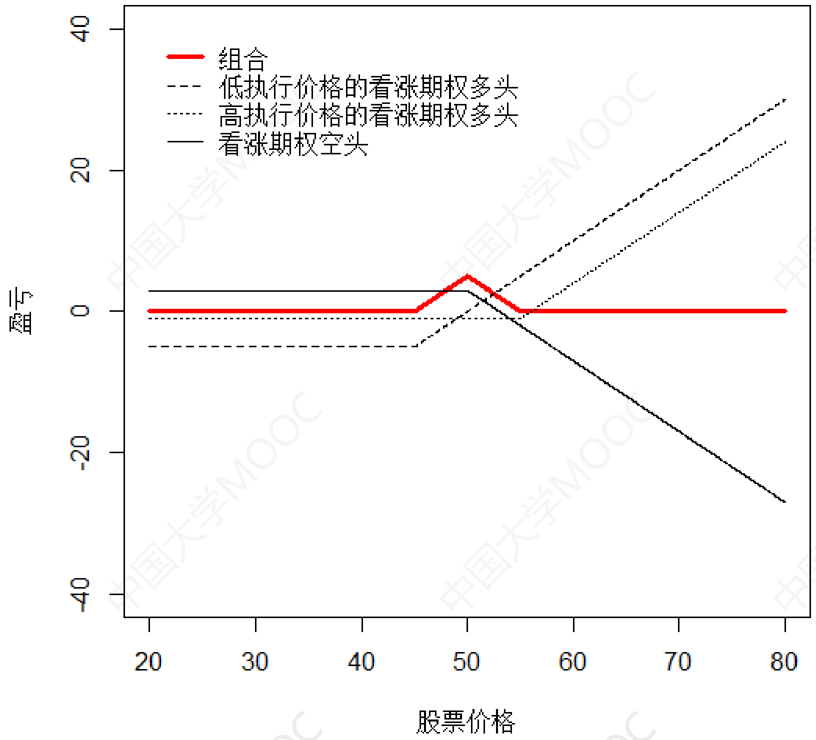
例：牛市差价（看涨期权多头 + 执行价格较高的看涨期权空头）



- 蝶式差价

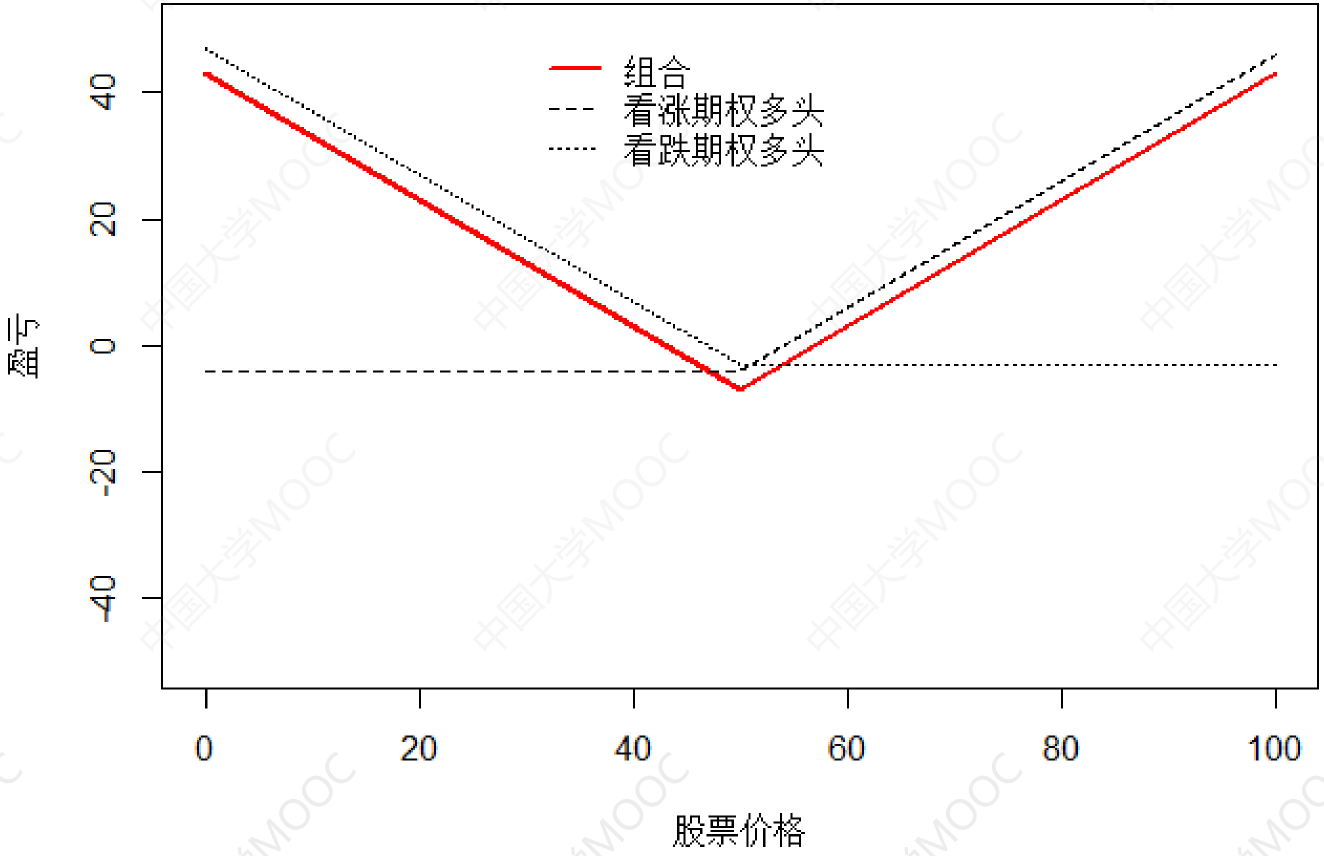
例：看涨期权的正向蝶式差价组合

- 执行价格分别为K_1和K_3的看涨期权多头
- 两份执行价格为K_2的看涨期权空头
- $K_2=(K_1+K_3)/2$



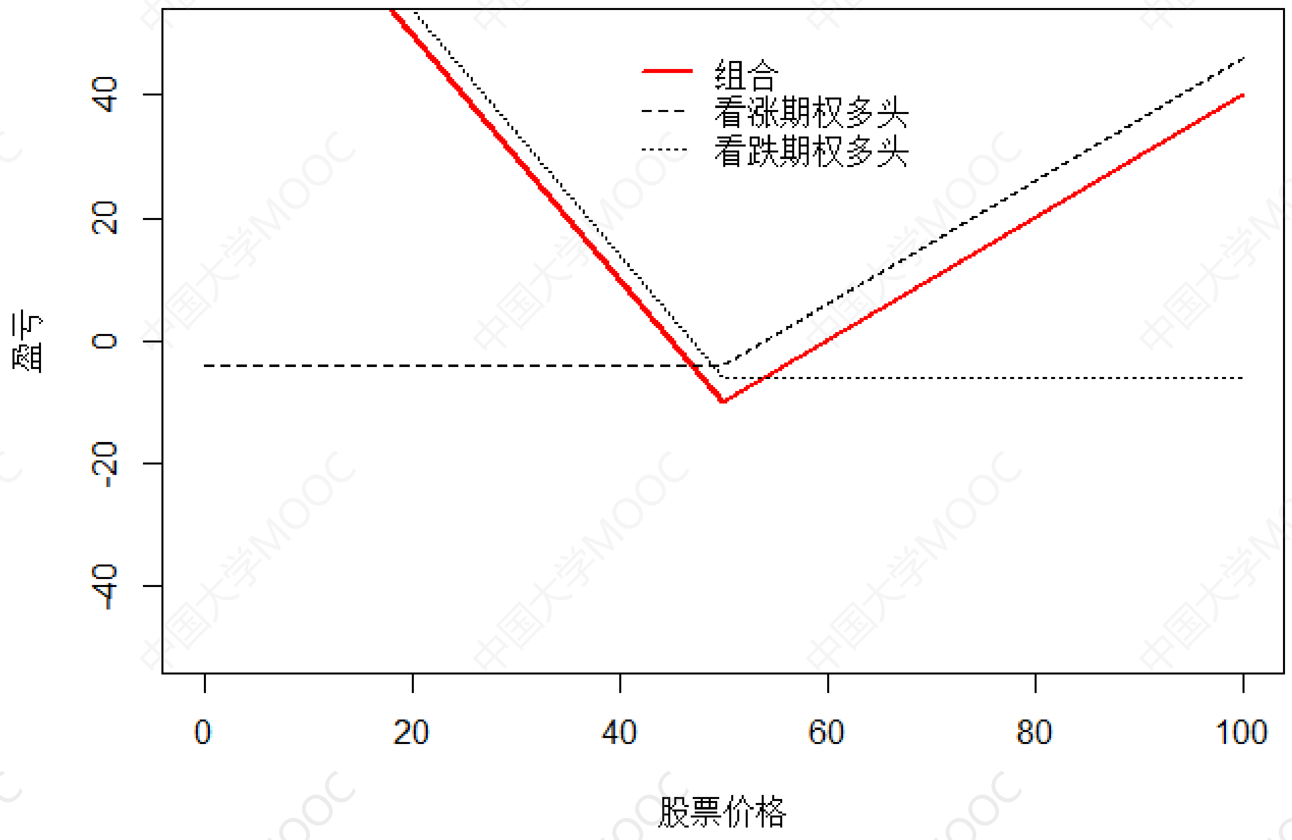
- **跨式**：由执行价格相同、期限相同的一份看涨期权和一份看跌期权组成

例：一份看涨期权的多头和一份看跌期权的多头组成



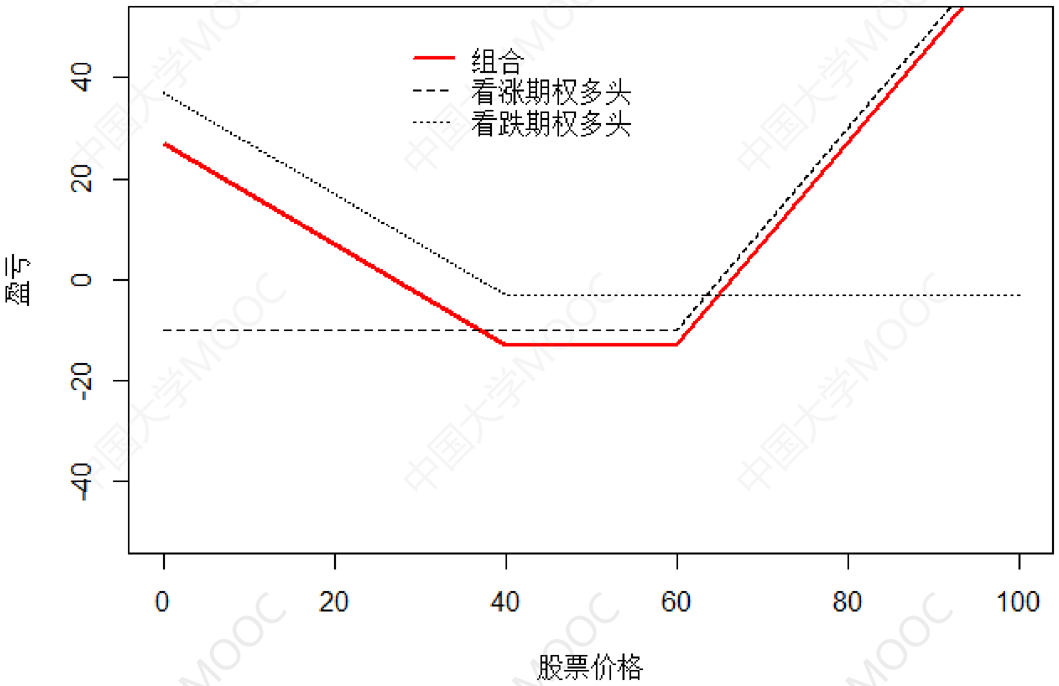
- **条式：由执行价格相同、期限相同的一份看涨期权和两份看跌期权组成。**

例：由一份看涨期权和两份看跌期权的多头组成

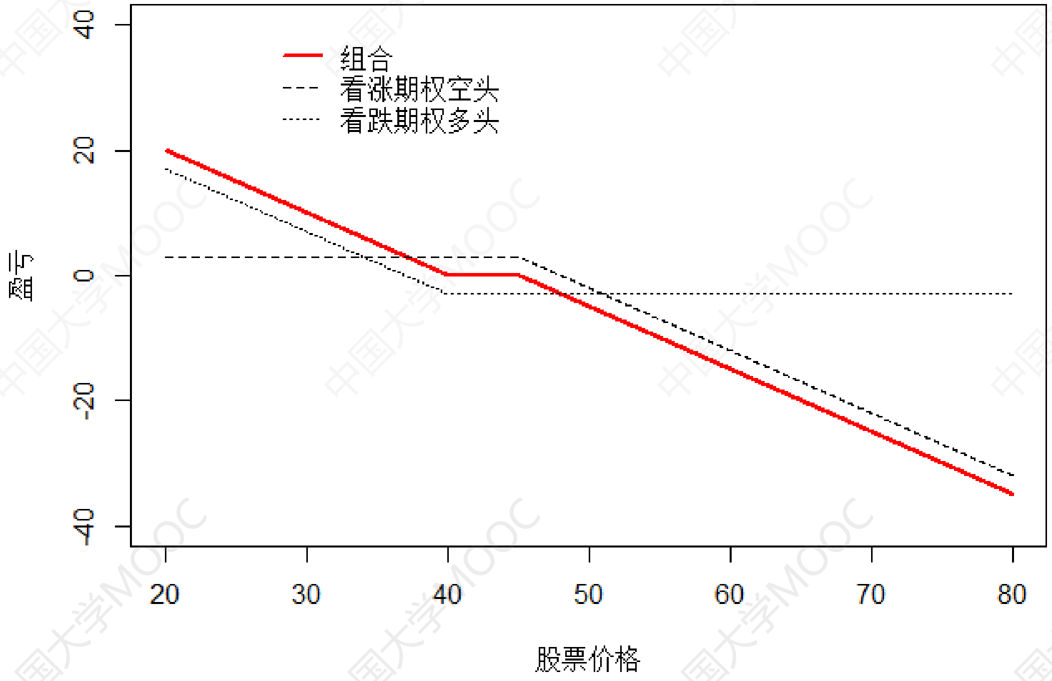


- **宽跨式**：**由到期日相同、执行价格不同的一份看涨期权和一份看跌期权组成，其中看涨期权的执行价格高于看跌期权。**

例：底部宽跨式，由多头组成



- **衣领策略**：购买较低执行价格的看跌期权，出售较高执行价格的看涨期权，有相同的到期日和标的资产。
  - 衣领宽度：两个不同执行价格的差



中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

期 权

小结

孟生旺

CONTENTS

期权的基本概念

- **期权**：买卖资产的权利
- 期权多头、期权空头
- 执行价格、期权价格（期权费）
- 看涨期权、看跌期权
- 欧式期权、美式期权

欧式期权的价格关系

没有红利：

$$C - P = S - K\mathrm{e}^{-rT} \quad \Rightarrow \quad C - P = (F - K)\mathrm{e}^{-rT}$$

$$F > K \quad \Rightarrow \quad C > P$$

红利为D：

$$C - P = S - D - K\mathrm{e}^{-rT}$$

美式期权的价格关系

$$S - D - K \le C_{美} - P_{美} \le S - D - Ke^{-rT}$$

$$C_{欧} - P_{欧} = S - D - Ke^{-rT}$$

美式看涨期权不会提前执行，故有 $C_{美} = C_{欧}$

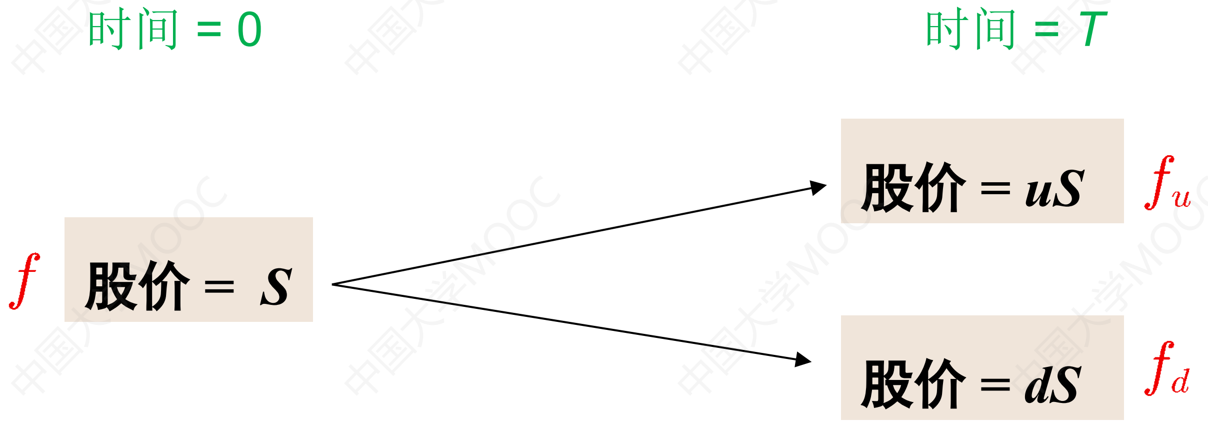
美式看跌期权提前执行可能更加有利，故有 $P_{美} > P_{欧}$

期权定价的无套利原理

不同的具体表现形式：

- 终值相等，现值必相等
- 复制技术：组合回收 = 期权回收 $\Rightarrow$ 期权价值 = 组合价值
- 在风险中性测度下，期望收益率 = 无风险利率
- 无风险资产的收益率 = 无风险利率

二叉树模型



$$f = e^{-rT}[p f_u + (1-p) f_d]$$

其中: $p = \dfrac{e^{rT}-d}{u-d}$, $u = e^{\sigma\sqrt{T}}$, $d = e^{-\sigma\sqrt{T}}$, 年波动率 $\sigma = s \times \sqrt{252}$

Black-Scholes定价模型

欧式看涨期权的价格：

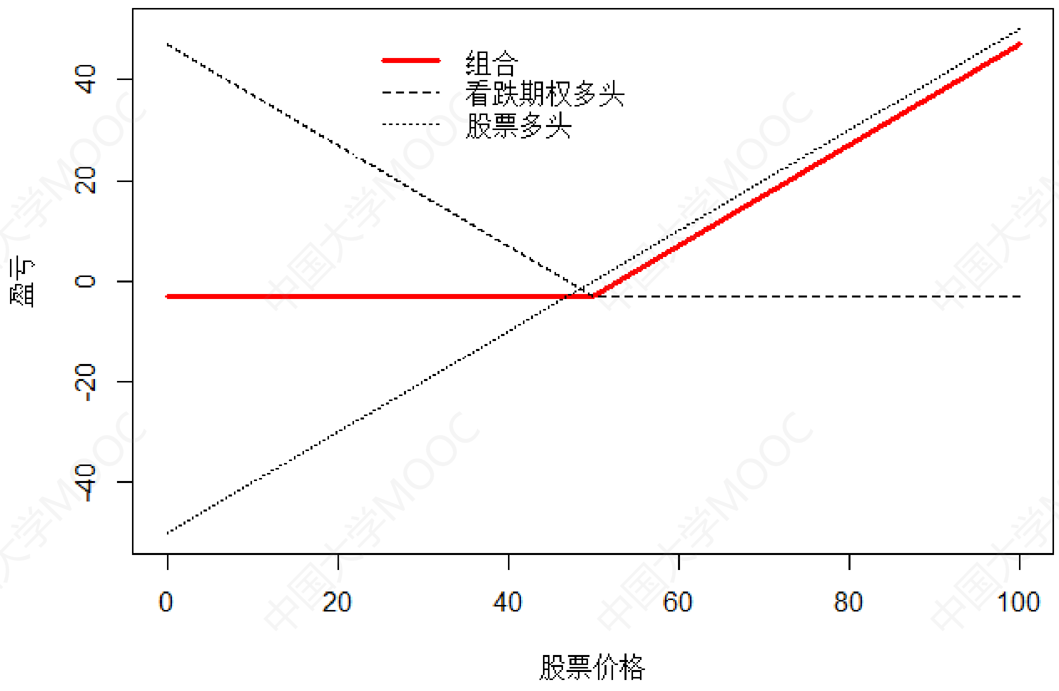
$$C = S \cdot \Phi(d_1) - K \cdot e^{-rT} \cdot \Phi(d_2)$$

$$\text{其中：} d_1 = \frac{\ln(S/K) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}}$$

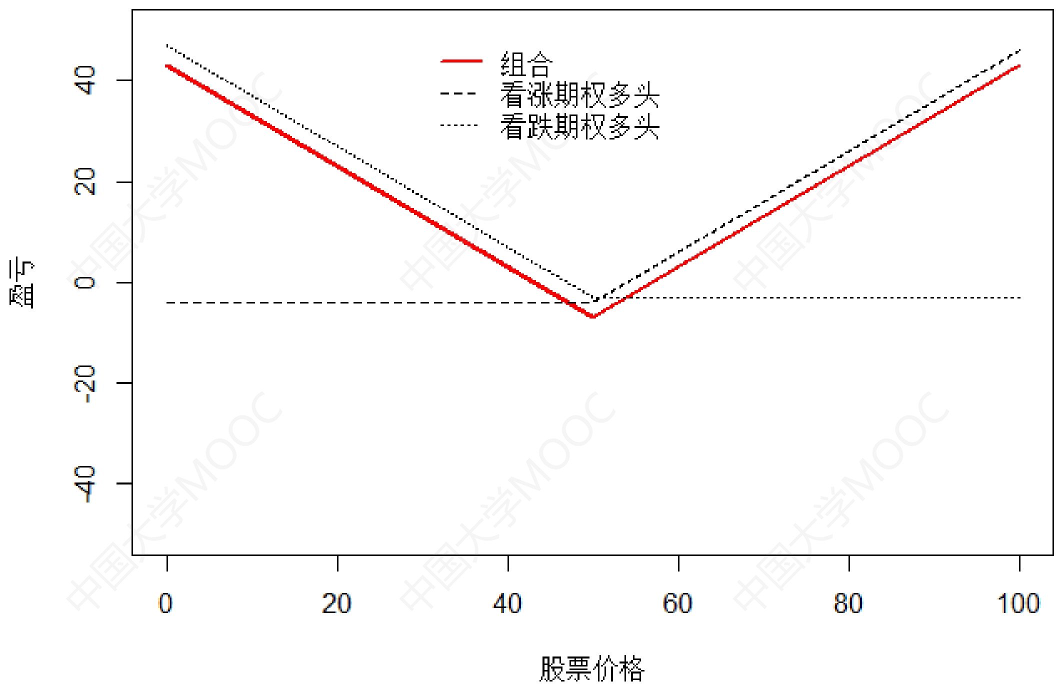
$$d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}$$

期权交易策略（例）

保险策略



跨式



Thank you

Presenter name

www.officeplus.cn