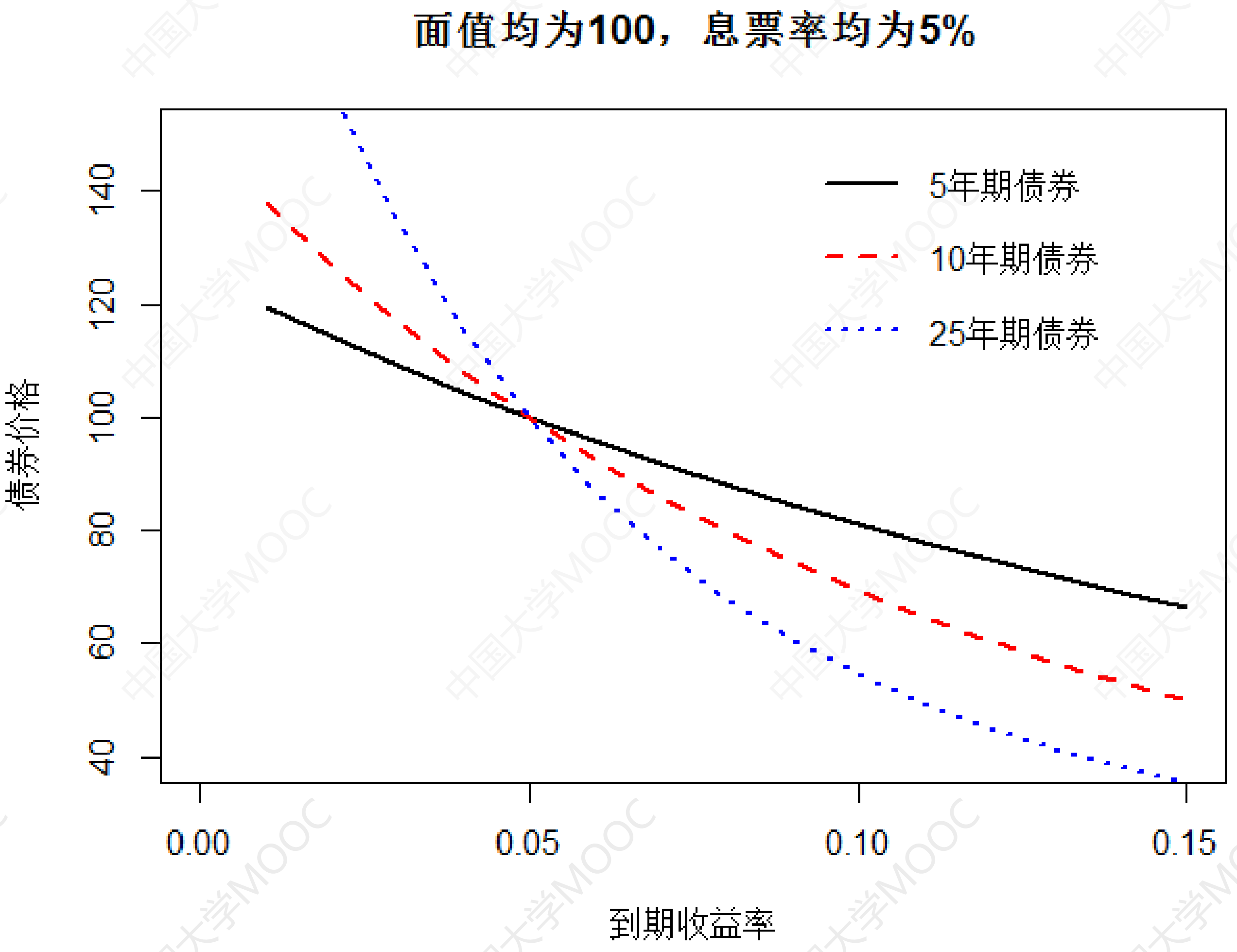
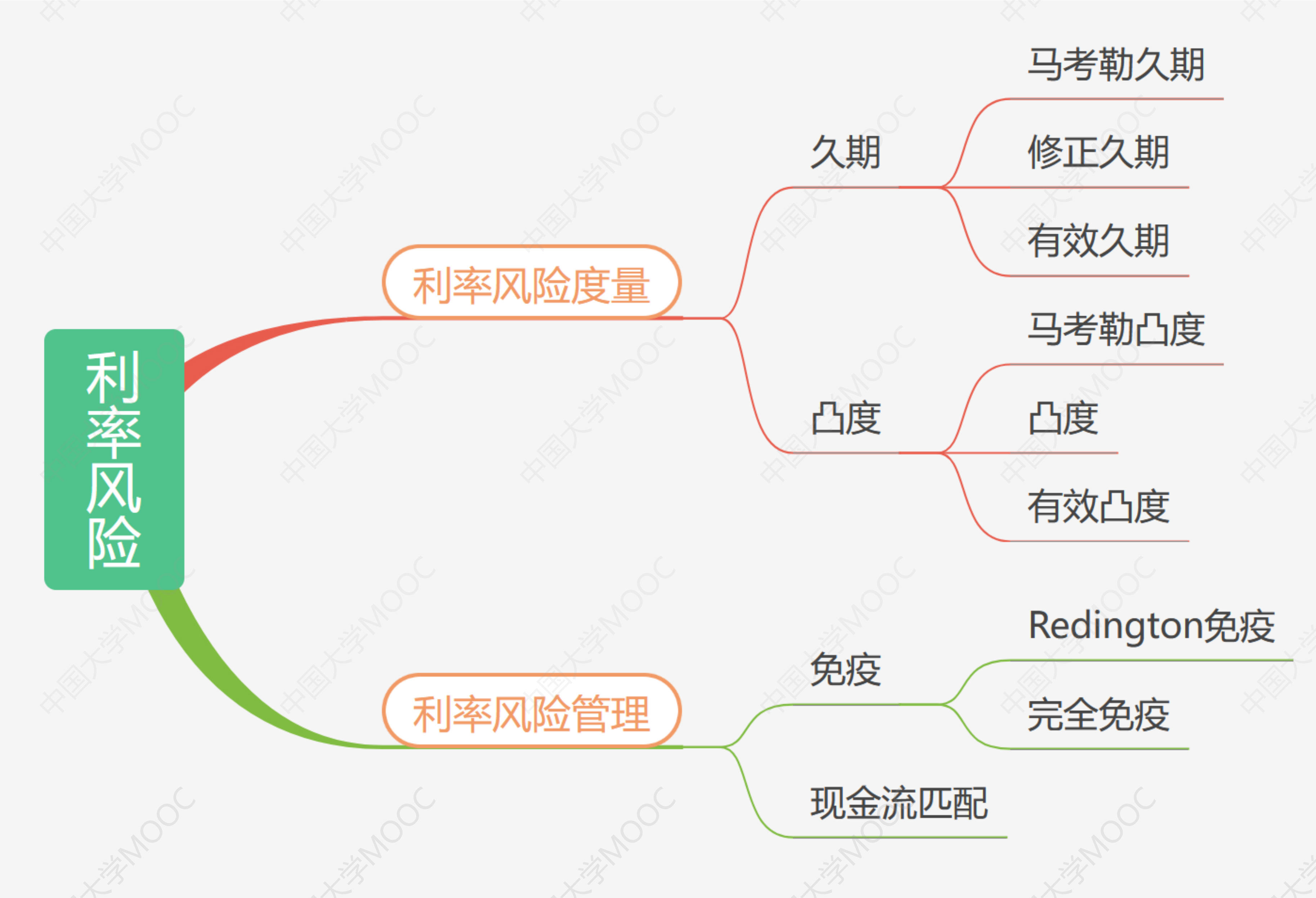
中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

利率风险

孟生旺

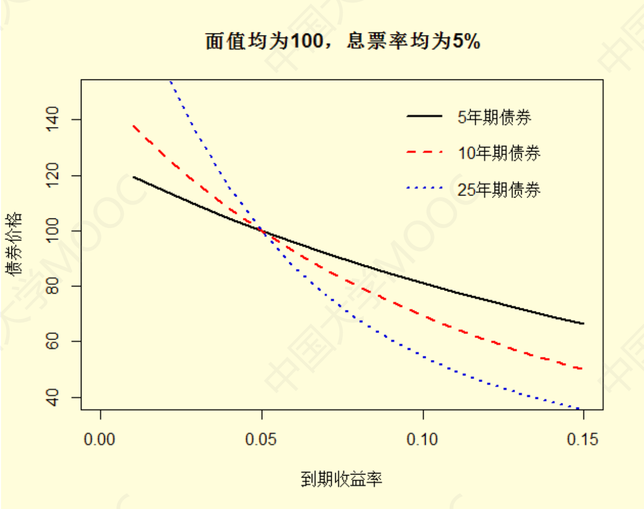
什么是利率风险？ 盈余 = 资产 － 负债




利率风险
利率风险度量
久期
马考勒久期
修正久期
有效久期
凸度
马考勒凸度
凸度
有效凸度
利率风险管理
免疫
Redington免疫
完全免疫
现金流匹配

如何衡量利率风险？

- 现金流的到期时间？
- 债券现金流有多个到期时间？
- 加权平均到期时间？马考勒久期



R_1	R_2	$\cdots$	R_n
t_1	t_2	$\cdots$	t_n

问题：不同时点上的现金流不能直接比较？

例：债券面值和偿还值1000元，3年期，息票率10%，每年末支付一次利息。到期收益率为10%，计算债券现金流的加权平均到期时间（马考勒久期）。

时间	1	2	3
现金流	100	100	1100
现金流的现值	$100/1.1 = 90.91$	$100/(1.1)^2 = 82.65$	$1100/(1.1)^3 = 826.45$

$$D_{马} = \frac{1\times 90.91 + 2\times 82.65 + 3\times 826.45}{90.91 + 82.65 + 826.45} = 2.74(年)$$

马考勒久期的定义

定义：现金流到期时间的加权平均数

t

R_t

$R_t e^{-t\delta}$

$$P(\delta)=\sum_{t>0} R_t e^{-t\delta}$$

$$D_{马}=\sum_{t>0} t\cdot\frac{R_t e^{-t\delta}}{P(\delta)}=\frac{1}{P(\delta)}\sum_{t>0} t\cdot R_t e^{-t\delta}$$

马考勒久期的性质

- 马考勒久期是一个时间概念。
- 马考勒久期越大，资产价格对利率的变化越敏感，利率风险越高。

马考勒久期的另一种定义

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}$$

（注意：负号）

含义：利息力变化导致资产单位价格的变化率。

$$P(\delta) = \sum_{t>0} R_t e^{-t\delta} \qquad P'(\delta) = -\sum_{t>0} t \cdot R_t e^{-t\delta}$$

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = \frac{1}{P(\delta)} \sum_{t>0} t \cdot R_t e^{-t\delta}$$

问题：马考勒久期是利息力的函数。
利息力变化时，马考勒久期如何变化？

利息力对马考勒久期的影响：

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

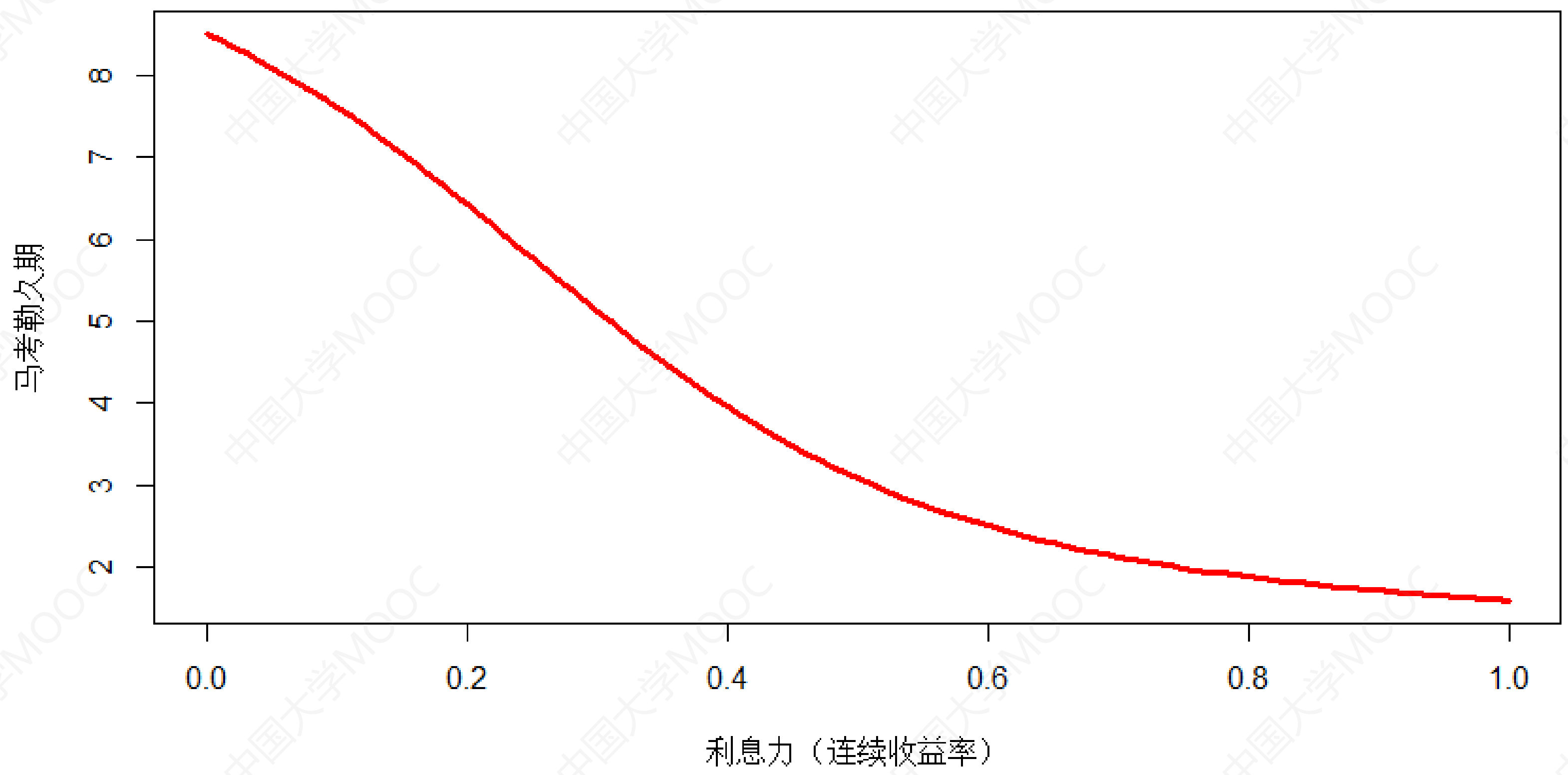
$$\frac{\mathrm{d}D_{马}}{\mathrm{d}\delta} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\delta}\frac{\sum\limits_{t>0} tR_t \mathrm{e}^{-t\delta}}{\sum\limits_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-t\delta}} = \frac{-\left[\sum\limits_{t>0} t^2 R_t \mathrm{e}^{-t\delta}\right]\left[\sum\limits_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-t\delta}\right] + \left[\sum\limits_{t>0} tR_t \mathrm{e}^{-t\delta}\right]^2}{\left[\sum\limits_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-t\delta}\right]^2}$$

$$= -\left[\frac{\sum\limits_{t>0} t^2 R_t \mathrm{e}^{-t\delta}}{\sum\limits_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-t\delta}} - \left(\frac{\sum\limits_{t>0} tR_t \mathrm{e}^{-t\delta}}{\sum\limits_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-t\delta}}\right)^2\right]$$

$$= -\left[E\left(t^2\right) - \left(E(t)\right)^2\right] = -\mathrm{var}(t) < 0$$

含义：利率越高，利率风险越小。

面值为100，期限为10年，息票率为5%的债券



例：计算期末付永续年金的马考勒久期 $D_{马}=\dfrac{1+i}{i}$

解：

$$P=\frac{1}{i}$$

$$1+i=e^{\delta}$$

$$P'(\delta)=\frac{dP}{d\delta}=\frac{dP}{di}\frac{di}{d\delta}=-\frac{1}{i^2}e^{\delta}=-\frac{1+i}{i^2}$$

$$D_{马}=-\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}=\frac{1+i}{i}$$

练习：计算期初付永续年金的马考勒久期。

$$D_{马} = \frac{1}{i}$$

参考答案：

$$P = 1 + \frac{1}{i}$$

$$1 + i = \mathrm{e}^{\delta}$$

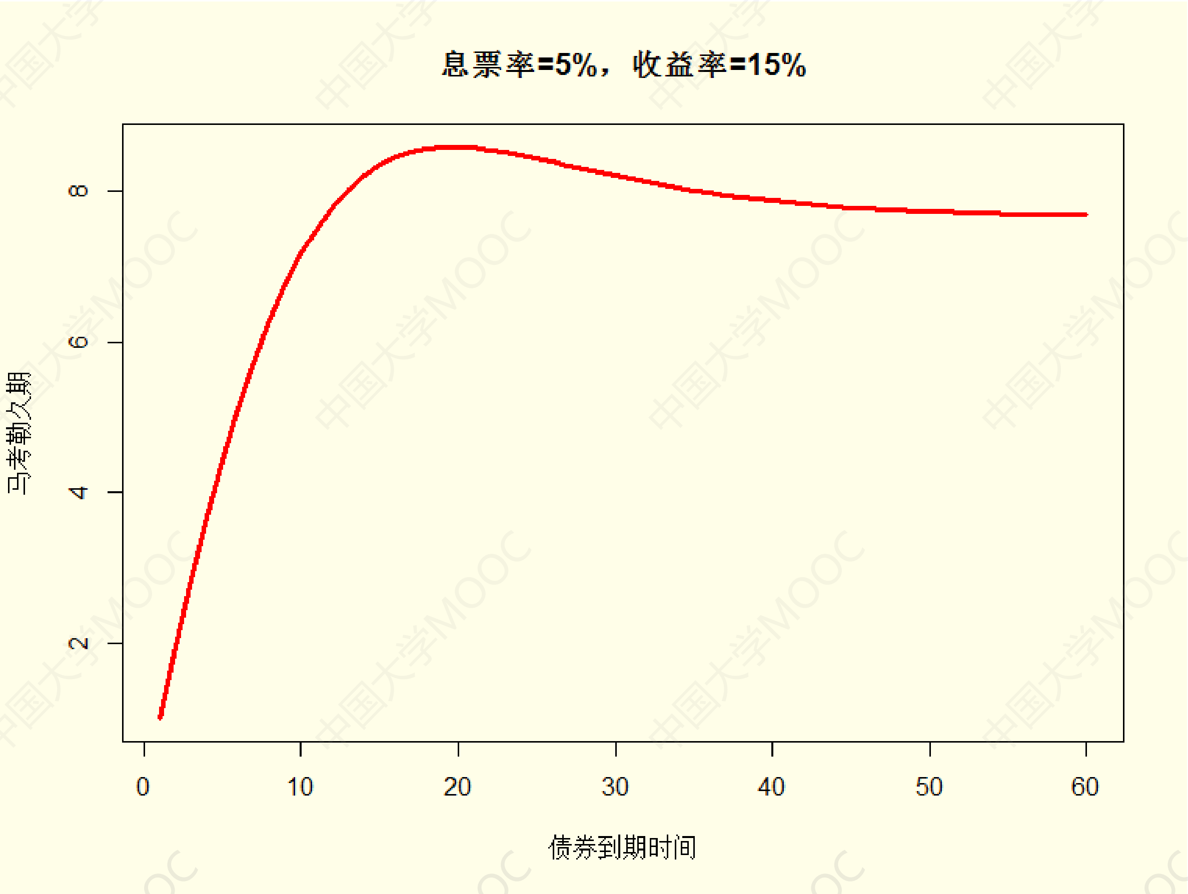
$$P'(\delta) = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\delta} = \frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\delta} = -\frac{1}{i^2}\mathrm{e}^{\delta} = -\frac{1+i}{i^2}$$

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = \frac{1}{i}$$

债券期限与马考勒久期（一个反例）

练习：债券的面值和偿还值100元，期限15年，年息票率5%，到期收益率15%，计算马考勒久期。若债券的期限调整为30年，马考勒久期是多少？

答案：8.36 和 8.21



练习：n 年期债券的价格等于面值（记为1），息票率和到期收益率均为 i，计算债券的马考勒久期为 $\ddot{a}_{\overline{n|}i}$

i	i	i	…	i	$i+1$
1	2	3	…	n-1	n

参考答案：P = 1

i	i	i	…	i	$i+1$
1	2	3	…	n-1	n

$$D_{马} = 1\cdot iv + 2\cdot iv^2 + \ldots + (n-1)\cdot iv^{n-1} + n\cdot(i+1)v^n$$

$$= i\left[1\cdot v + 2\cdot v^2 + \ldots + (n-1)\cdot v^{n-1} + n\cdot v^n\right] + nv^n$$

$$= i(Ia)_{\overline{n}|} + nv^n \qquad = i\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|} - nv^n}{i} + nv^n = \ddot{a}_{\overline{n}|}$$

久 期

- **久期：名义收益率 (y) 变化所导致的资产单位价格的变化。**
- **y 表示每年复利 m 次的年名义收益率，** $y := i^{(m)}$ **与 m 有关。**

$$D^{(m)} = -\frac{P'(y)}{P(y)}$$

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}$$

$$P(y) = \sum_{t>0} R_t \left(1 + \frac{y}{m}\right)^{-mt}$$

$$P(\delta) = \sum_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-t\delta}$$

当 $m \to \infty$ 时，

$$y = i^{(\infty)} = \delta$$

久期与马考勒久期的关系

$$P'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{t>0}R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt}=-\sum_{t>0}tR_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt-1}$$

$$D^{(m)}=\frac{D_{马}}{1+y/m}$$

$$D^{(m)}=-\frac{P'(y)}{P(y)}=\frac{\frac{1}{P(y)}\sum_{t>0}tR_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt}}{1+y/m}=\frac{D_{马}}{1+y/m}$$

久期与马考勒久期的关系

$$D^{(m)} = \frac{D_{马}}{1 + y/m}$$

$$\lim_{m\to\infty} D^{(m)} = D_{马}$$

- **当$m \to \infty$时，$y \to \delta$，故**

$$\lim_{m\to\infty} D^{(m)} = \lim_{m\to\infty} -\frac{P'(y)}{P(y)} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = D_{马}$$

- 例：债券价格为100。债券价格关于到期年有效收益率的一阶导数为 –700。如果到期年有效收益率为8%。计算债券的马考勒久期。

$$D^{(m)} = \frac{D_{马}}{1+y/m}$$

参考答案：

$$P = 100, \quad P'(y) = -700, \quad y = 8\%, \quad m = 1$$

$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)} = 7$$

$$D_{马} = (1+y)D = 1.08 \times 7 = 7.56$$

$$D^{(m)} = \frac{D_{马}}{1 + y/m}$$

- **例：n年期债券的面值和偿还值均为1，到期收益率为 i，平价发行。计算该债券的久期。**

i	i	i	…	i	$i+1$
1	2	3	…	n-1	n

i	i	i	…	i	$i+1$
1	2	3	…	n-1	n

- **参考答案：**
- **价格 P = 1**
- **马考勒久期：**

$$D_{马}=\left(iv+2iv^2+3iv^3+\ldots+niv^n\right)+nv^n=i\cdot(Ia)_{\overline{n}|}+nv^n=i\frac{\ddot{a}_{\overline{n}|}-nv^n}{i}+nv^n=\ddot{a}_{\overline{n}|}$$

$$D=\frac{D_{马}}{1+i}=a_{\overline{n}|}$$

资产价格与久期的关系

$$D^{(m)} = -\frac{P'(y)}{P(y)} \Leftrightarrow D^{(m)} = -\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}y} \approx -\frac{1}{P}\frac{\Delta P}{\Delta y} \Rightarrow \frac{\Delta P}{P} \approx -D^{(m)} \cdot (\Delta y)$$

注： △*y* 表示名义收益率的变化，用基点表述。一个基点 = 0.01%

$$\Delta y := \Delta i^{(m)}$$

资产价格与马考勒久期的关系

$$D^{(m)} = -\frac{P'(y)}{P(y)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} \approx -D^{(m)} \cdot (\Delta y)$$

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta P}{P} \approx -D_{马} \cdot (\Delta \delta)$$

注： $\Delta\delta$ 表示利息力的变化，用基点表示。一个基点 = 0.01%

例：债券的价格为115.92元，到期收益率为7%，久期为8.37。到期收益率上升5个基点时（上升到7.05%），债券的价格为多少。

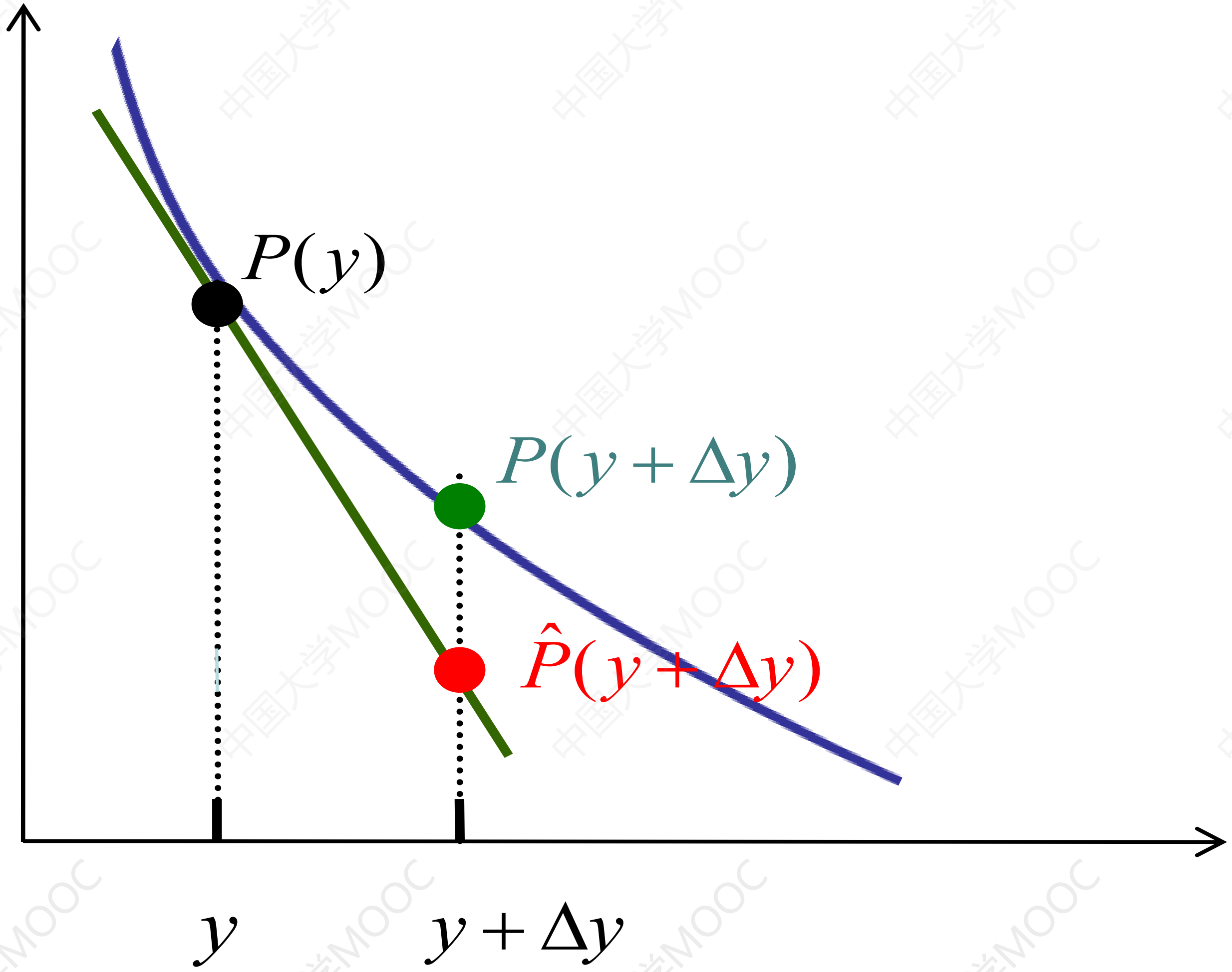
解：收益率上升时，债券价格下降的百分比为：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D \cdot (\Delta y) = -8.37 \times 0.05\% = -0.42\%$$

新的债券价格近似为：

$$115.92 \times (1-0.42\%) = 115.43$$

近似误差？



$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^{(m)} \cdot (\Delta y)$$

价格曲线越弯曲，近似误差越大

练习：

（1）一项永续年金，每月末支付1万元，每年复利12次的年名义利率为6%，计算久期和马考勒久期。

（2）若年名义利率上升10个基点（上升到6.1%），该年金价值如何变化？

（3）若利息力上升10个基点，该年金价值如何变化？

$$m = 12, \qquad y = i^{(12)} = 6\%$$

$$P = \frac{12}{y}$$

参考答案：

$$m = 12$$

$$y = i^{(12)} = 6\%$$

$$P = \frac{12}{y}$$

$$P' = -\frac{12}{y^2}$$

（1） $$D^{(m)} = -\frac{P'}{P} = \frac{12}{y^2}\frac{y}{12} = \frac{100}{6}$$

（1） $$D_{\text{马}} = D^{(m)}\left(1+\frac{y}{12}\right) = \frac{100}{6}(1+0.5\%) = 16.75$$

（2） $$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^{(m)}(\Delta y) = -\frac{100}{6}(0.1\%) = -1.667\%$$

精确值：下降 **1.64%**

（3） $\left(1+\frac{6\%}{12}\right)^{12}=e^{\delta} \quad \Leftrightarrow \quad \delta=12\ln\left(1+\frac{6\%}{12}\right)=5.985\%$

利息力上升10个基点，即上升到 6.085%，价值变化百分比为：

$$\frac{\Delta P}{P}\approx -D_{马}(\Delta\delta)=-16.75(0.1\%)=-1.675\%$$

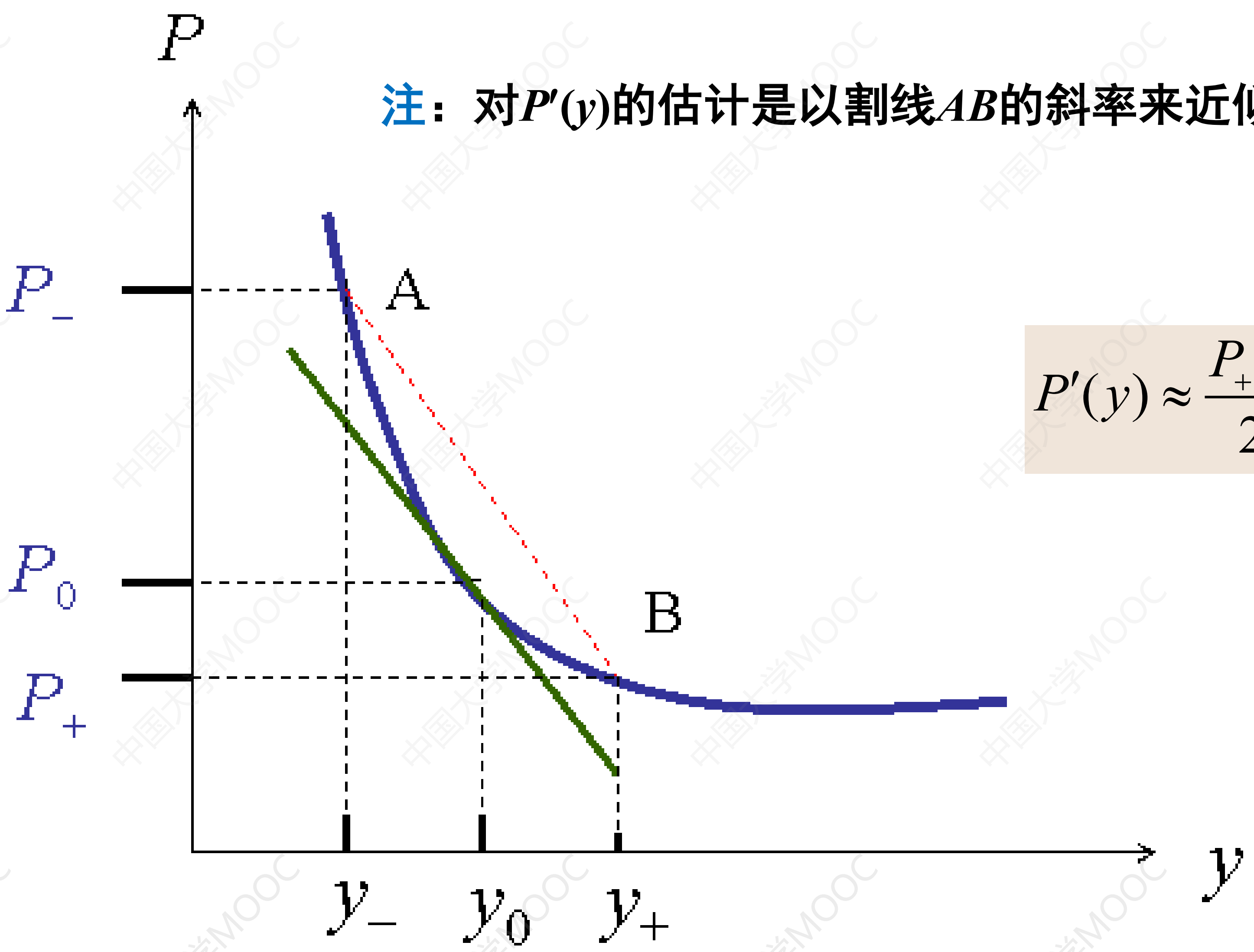
精确值：下降 1.645%

有效久期

- 久期需要计算资产价格关于名义收益率y的一阶导数$P'(y)$。
- 如果现金流是不确定的（如可赎回债券），近似计算一阶导数：

$$P'(y) \approx \frac{P_+ - P_-}{2\Delta y}$$

- 符号：
  - P_+　收益率上升Δy时的债券价格
  - P_-　收益率下降Δy时的债券价格



注：对$P'(y)$的估计是以割线AB的斜率来近似在 y_0处的切线斜率。

$$P'(y) \approx \frac{P_+ - P_-}{2\Delta y}$$

近似久期：

$$D_{效} = -\frac{P_+ - P_-}{P(2\Delta y)}$$

$$D = -\frac{P'(y)}{P(y)}$$

近似马考勒久期：

$$D_{效} = -\frac{P_+ - P_-}{P(2\Delta\delta)}$$

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}$$

例： 已知一个6年期可赎回债券的现价为100元，当年收益率上升100个基点时，该债券的价格将降为95.87元。当年收益率下降100个基点时，该债券的价格将升至104.76元。计算该债券的有效久期。

解：

$$P=100 \qquad P_{+}=95.87$$

$$P_{-}=104.76 \qquad \Delta y=0.01$$

$$D_{效}=-\frac{P_{+}-P_{-}}{P(2\Delta y)}=-\frac{95.87-104.76}{100\times 2\times 0.01}=4.45$$

马考勒凸度

- **马考勒久期：**

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} := E(t)$$

- **马考勒凸度：**

$$C_{马} = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = \frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}\delta^2}\left(\sum_{t>0} R_t \mathrm{e}^{-t\delta}\right)}{P(\delta)} = \frac{\sum_{t>0} t^2 R_t \mathrm{e}^{-t\delta}}{P(\delta)} = E(t^2)$$

马考勒久期与马考勒凸度的关系

马考勒久期： $D_{马} = E(t)$

马考勒凸度： $C_{马} = E(t^2)$

$$\operatorname{var}(t) = E(t^2) - \left[E(t)\right]^2 = C_{马} - D_{马}^2$$

$$C_{马} = \operatorname{var}(t) + D_{马}^2$$

结论：久期给定时，现金流的时间越分散，马考勒凸度越大。

凸度

- **基于名义收益率定义凸度：**

马考勒久期： $D_{马} = -\dfrac{P'(\delta)}{P(\delta)}$

马考勒凸度： $C_{马} = \dfrac{P''(\delta)}{P(\delta)}$

久期： $D^{(m)} = -\dfrac{P'(y)}{P(y)}$

凸度： $C^{(m)} = \dfrac{P''(y)}{P(y)}$

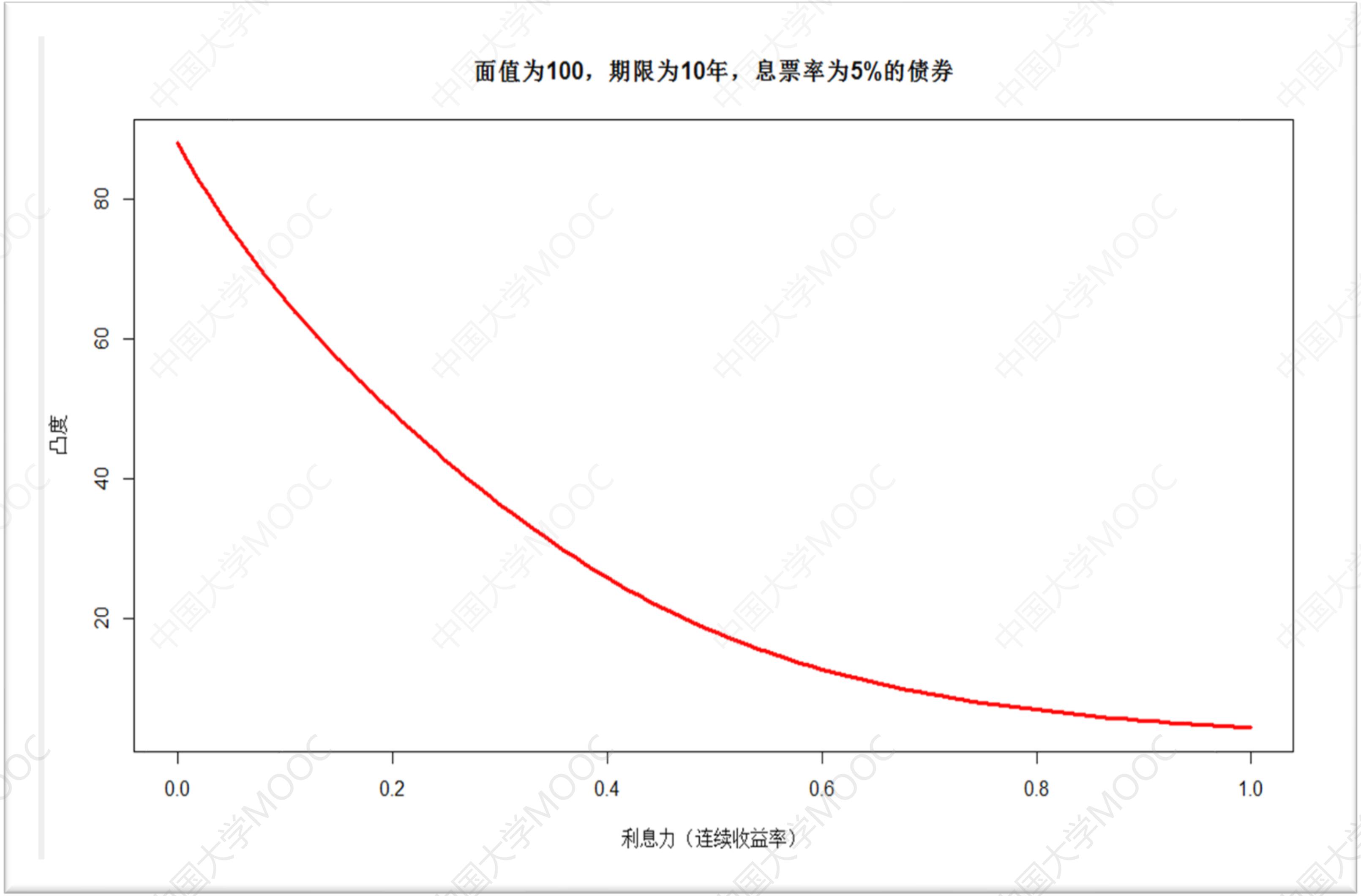
凸度： $C^{(m)}=\dfrac{P''(y)}{P(y)}$

$$P(y)=\sum_{t>0}R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt}$$

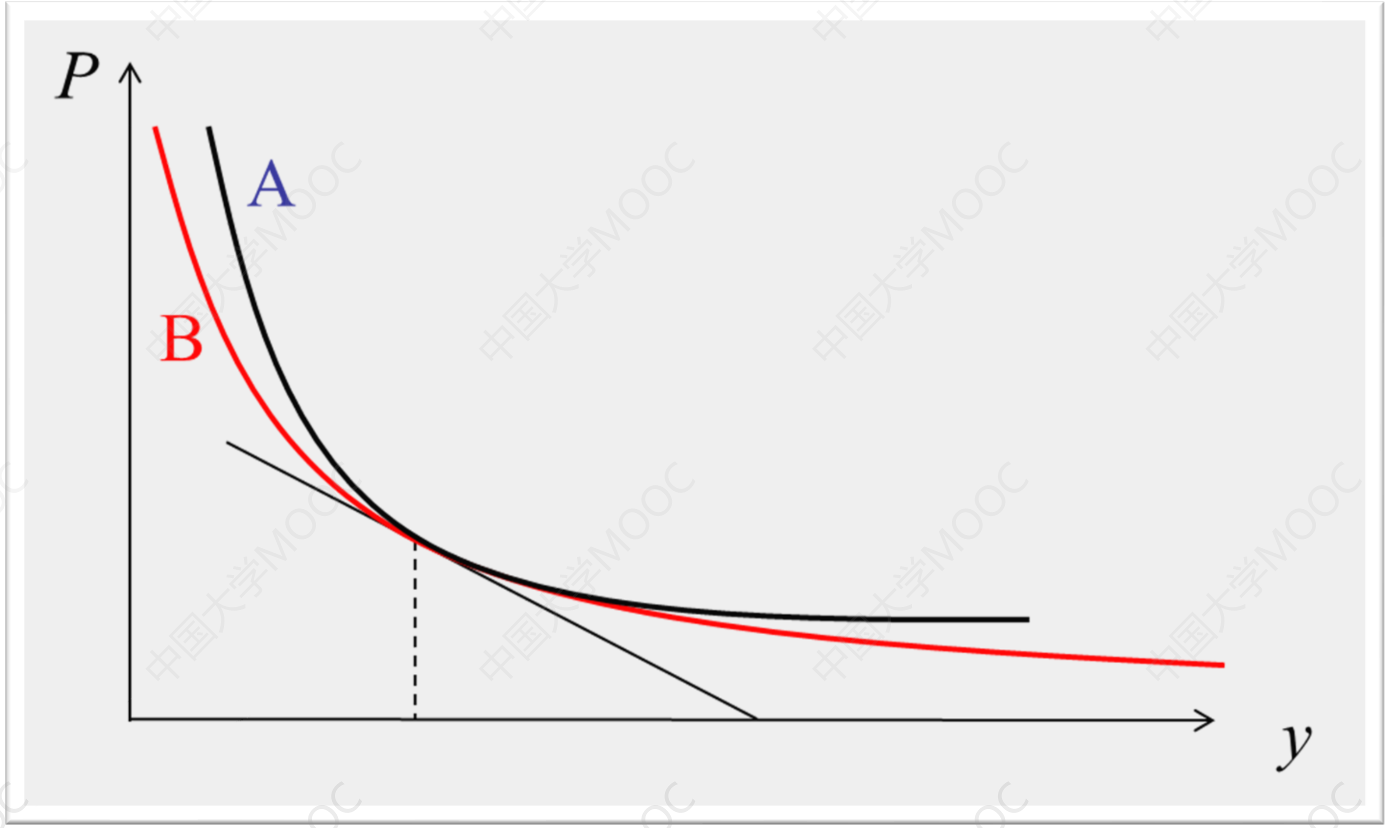
$$P'(y)=\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\sum_{t>0}R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt}=-\sum_{t>0}tR_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt-1}$$

$$P''(y)=\sum_{t>0}t\left(\frac{mt+1}{m}\right)R_t\left(1+\frac{y}{m}\right)^{-mt-2}$$

可以证明，凸度是收益率 y 的减函数（思考题）



凸度对资产价格的影响



债券A的凸度大于债券B的凸度：

当利率下降时，A的价格上升快

当利率上升时，A的价格下降慢

有效凸度

- 有效凸度用于近似计算马考勒凸度或凸度：

$$C_{马}=\frac{P''(\delta)}{P(\delta)}$$

$$P''(\delta)\approx\frac{(P_{+}+P_{-}-2P)}{(\Delta\delta)^{2}}$$

$$C=\frac{P''(y)}{P(y)}$$

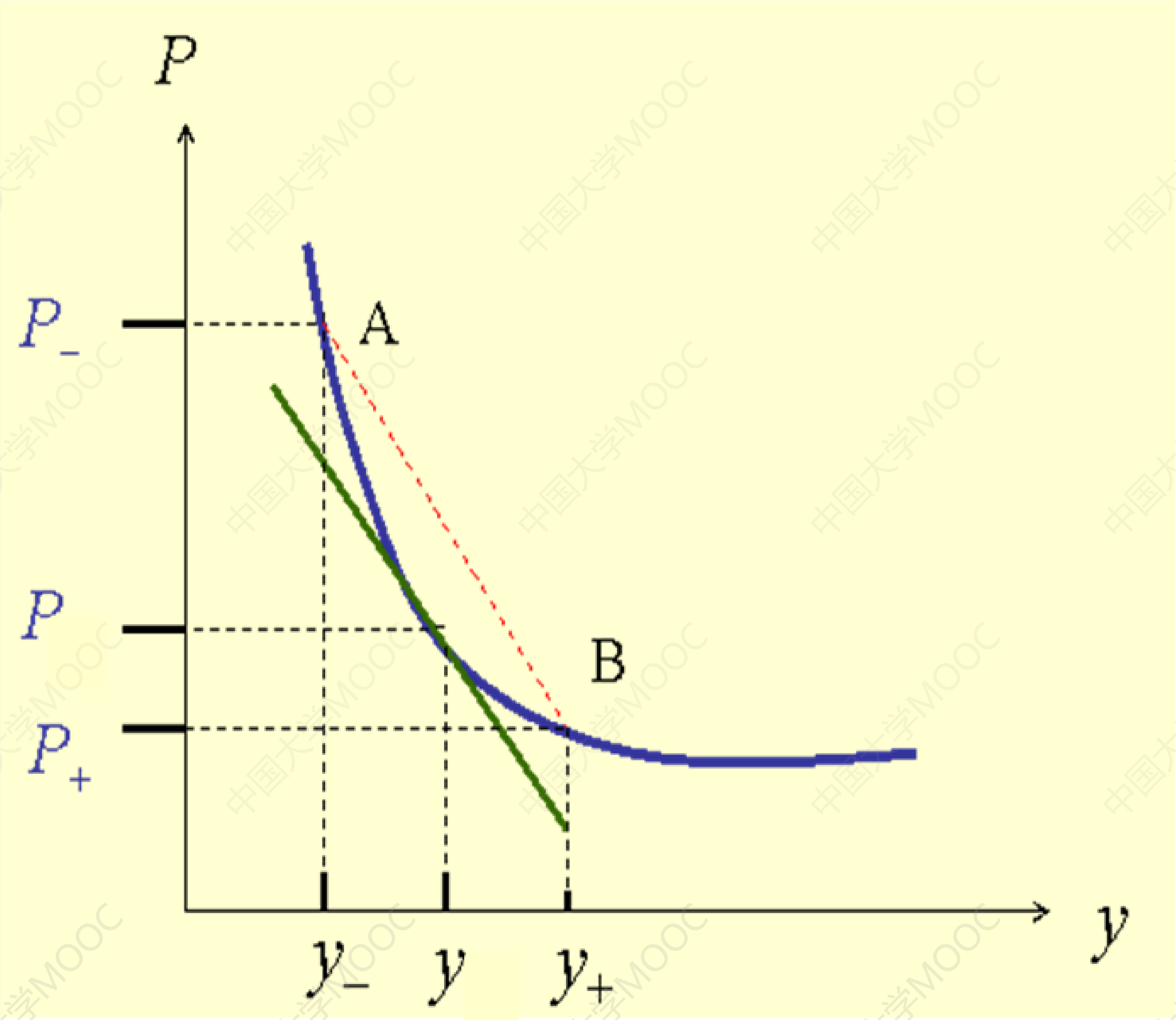
$$P''(y)\approx\frac{(P_{+}+P_{-}-2P)}{(\Delta y)^{2}}$$

例：$P''(y)$ **的近似计算**：

$$P''(y)=\frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}y^2}$$

$$\approx\frac{\left(\frac{P_- - P}{\Delta y}\right)-\left(\frac{P-P_+}{\Delta y}\right)}{\Delta y}$$

$$=\frac{\left(P_+ + P_- - 2P\right)}{\left(\Delta y\right)^2}$$



有效凸度的计算公式：

$$C=\frac{P''(y)}{P(y)}$$

$$P''(y)\approx\frac{\left(P_{+}+P_{-}-2P\right)}{\left(\Delta y\right)^{2}}$$

$$C_{效}=\frac{\left(P_{+}+P_{-}-2P\right)}{\left(\Delta y\right)^{2}P}$$

注：用利息力 δ 代替名义收益率 y，得到马考勒凸度的近似计算。

例： 一个6年期可赎回债券的现价为100元；年收益率上升100个基点时，价格将降为95.87元；年收益率下降100个基点时，价格将升至104.76元。计算该债券的有效凸度。

解： 该债券的有效凸度为：

$$C_{效} = \frac{P_{+} + P_{-} - 2P}{(\Delta y)^2 P} = \frac{95.87 + 104.76 - 2\times 100}{(0.01)^2 (100)} = 63$$

- **练习**：3年期债券的当前价格为\$97.42 ，每半年复利一次的年收益率为9%。如果债券的年收益率增加100个基点，债券价格将下降为\$94.92；如果债券的年收益率下降100个基点，价格将上升为\$100。计算债券的有效久期和有效凸度.

参考答案:

$$D_{效} = -\frac{\left(P_{+} - P_{-}\right)}{\left(2\Delta y\right)P} = -\frac{94.92 - 100}{2 \times 0.01 \times 97.42}$$

$$C_{效} = \frac{\left(P_{+} + P_{-} - 2P\right)}{\left(\Delta y\right)^{2} P} = \frac{94.92 + 100 - 2 \times 97.42}{(0.01)^{2} \times 97.42}$$

久期和凸度的关系

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} := E(t) \qquad C_{马} = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} := E(t^2)$$

$$D^{(m)} = -\frac{P'(y)}{P(y)} \qquad C^{(m)} = \frac{P''(y)}{P(y)} \qquad y := i^{(m)}$$

若 $\boldsymbol{m=1}$，则有

$$D = D_{马} \cdot e^{-\delta} \qquad C = \left(D_{马} + C_{马}\right) \cdot e^{-2\delta}$$

证明（假设 $m=1$, 即 $y=i$）

$$1+i=\mathrm{e}^{\delta} \qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\delta}=\mathrm{e}^{\delta}$$

$$P'(\delta)=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}\delta}=\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}\delta}=P'(i)\mathrm{e}^{\delta}$$

$$D=D_{马}\cdot\mathrm{e}^{-\delta}$$

贴现1年

$$P''(\delta)=P''(i)\mathrm{e}^{2\delta}+P'(i)\mathrm{e}^{\delta}$$

$$C_{马}=C\cdot\mathrm{e}^{2\delta}-D\cdot\mathrm{e}^{\delta}$$

$$C=\left(D_{马}+C_{马}\right)\cdot\mathrm{e}^{-2\delta}$$

贴现2年

练习：证明对于任意的 m > 0 ，有下述关系成立。

$$D^{(m)} = D_{马} \cdot e^{-\delta/m}$$

$$C^{(m)} = \left(D_{马}/m + C_{马}\right) \cdot e^{-2\delta/m}$$

贴现1/m年

贴现2/m年

例：每年末支付一次的复递增永续年金，第1年末的付款额为1，年增长率为 r，年有效利率为 i，计算该年金的马考勒久期。

解：期末付复递增永续年金的现值可以表示为

$$P=(i-r)^{-1}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}=-(i-r)^{-2}$$

久期为

$$D=-\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i}=(i-r)^{-1}$$

马考勒久期为

$$D_{马}=(1+i)\cdot D=\frac{1+i}{i-r}$$

练习：每年初支付一次的复递增永续年金，第1年初的付款额为1，年增长率为 r，年有效利率为 i，计算该年金的马考勒久期。

解：期初付复递增永续年金的现值可以表示为

$$P = \frac{1+i}{i-r}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i} = -(i-r)^{-2}(1+r)$$

久期为 $$D = -\frac{1}{P}\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}i} = \frac{1+r}{(1+i)(i-r)}$$

马考勒久期为 $$D_{马} = (1+i)\cdot D = \frac{1+r}{i-r}$$

资产组合的久期和凸度

- **加权平均计算，权重为每种资产的价格**

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

权重：$\dfrac{P_k}{P}$

$$D = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} D_k$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} C_k$$

资产组合的久期：

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

$$D = -\frac{P'}{P} = -\frac{\sum_{k=1}^{n} P_k'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\left(\frac{P_k'}{P_k}\right) P_k}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} D_k$$

资产组合的凸度：

$$P = P_1 + P_2 + \cdots + P_n$$

$$C = -\frac{P''}{P} = -\frac{\sum_{k=1}^{n} P_k''}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{-\left(\frac{P_k''}{P_k}\right) P_k}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} C_k$$

例： 资产组合包含两种债券。第一种债券的面值和偿还值为100，年息票率为6%，期限为5年。第二种债券为10年期的零息债券，到期偿还值100。假设年有效利率为5%，计算组合的久期。

解：

- 第一种债券：

- 第二种债券：

第一种债券的久期（应用EXCEL，参见MOOC）：

期限5年，面值为100，息票率6%，年有效利率5%

	A	B	C	D	E	F	G
1	现金流	时间	贴现因子	现值	权重	时间*权重	
2	6	1					
3	6	2					
4	6	3					
5	6	4					
6	106	5					
7							
8	债券的价格						
9	马考勒久期						
10	修正久期						

第二种债券（零息债券）：

价格为： $P_2 = 100(1+0.05)^{-10} = 61.39$

马考勒久期： 10

久期： $D_2 = 10 \div (1+0.05) = 9.52$

$$P_1 = 104.33, \quad P_2 = 61.39$$

$$D_1 = 4.26, \quad D_2 = 9.52$$

组合的价格： $$P = P_1 + P_2 = 165.72$$

组合的久期： $$D = \frac{P_1}{P} D_1 + \frac{P_2}{P} D_2 = 6.21$$

练习：投资者只有两种资产可以选择：

（1）5年期的零息债券。

（2）连续支付、每年支付1元的永续年金。

利息力为5%。为了使得资产组合的马考勒久期为10，在每种资产上的投资比例应该是多少？

参考答案：

零息债券：马考勒久期 $= 5$

永续年金：$P = 1/\delta,\qquad P' = -1/\delta^2$

马考勒久期 $= -P'/P = 1/\delta = 1/0.05 = 20$

$$5w + 20(1 - w) = 10$$

$$w = 2/3$$

久期和凸度对资产价格的影响

资产价格的二阶泰勒近似：

$$P(y) \approx P(y_0) + P'(y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2}P''(y_0)(y - y_0)^2$$

$$\Delta P \approx P'(y_0)(\Delta y) + \frac{1}{2}P''(y_0)(\Delta y)^2$$

资产价格变化的近似公式：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\text{久期}\cdot(\Delta y) + \frac{1}{2}\cdot\text{凸度}\cdot(\Delta y)^2$$

注意：久期、凸度、收益率的配比

问题：久期和凸度如何影响利率风险？

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\text{久期}\cdot(\Delta y) + \frac{1}{2}\cdot\text{凸度}\cdot(\Delta y)^2$$

利率下降时，即Δy < 0：

（1）久期越大，价格上升越多

（2）凸度越大，价格上升越多

利率上升时，即Δy > 0：

（1）久期越大，价格下降越多；

（2）凸度越大，价格下降越小

例： 债券的面值是1000元，期限为15年，年息票率为11%，到期时按面值偿还。假设到期收益率为12%，计算债券的价格、久期和凸度。到期收益率上升50个基点时，债券价格将如何变化？

	110	110	……	110	110 1000
t:	1	2	……	14	15

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -\text{久期}\cdot(\Delta y) + \frac{1}{2}\cdot\text{凸度}\cdot(\Delta y)^2$$

计算马考勒久期、马考勒凸度、久期、凸度、价格变化幅度（计算过程参见下页EXCEL）

	110	110	……	110	110 1000
t:	1	2	……	14	15

$$D_{马} = E(t) = 7.7486, \qquad D = D_{马}(1+y)^{-1} = 6.9184$$

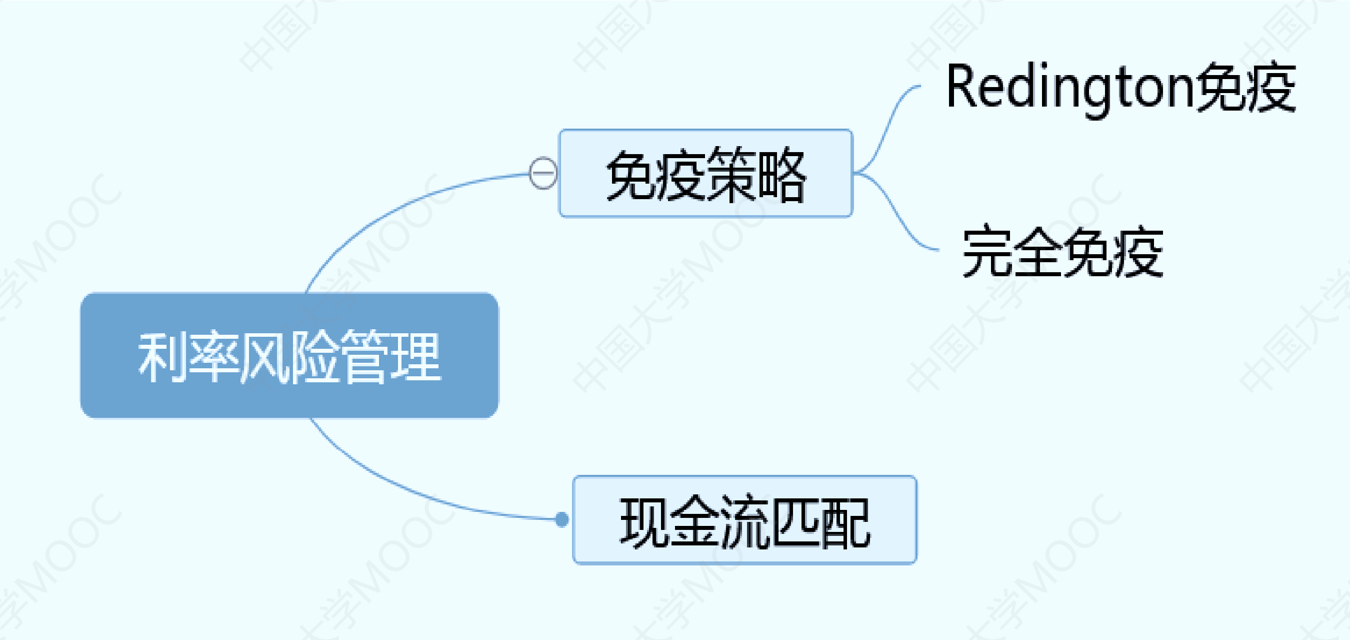
$$C_{马} = E\left(t^2\right) = 85.9193, \qquad C = \left(C_{马} + D_{马}\right)(1+y)^{-2} = 74.6716$$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -久期\cdot(\Delta y) + \frac{1}{2}\cdot凸度\cdot(\Delta y)^2 = -3.3659\% \qquad (\Delta y = 0.5\%)$$

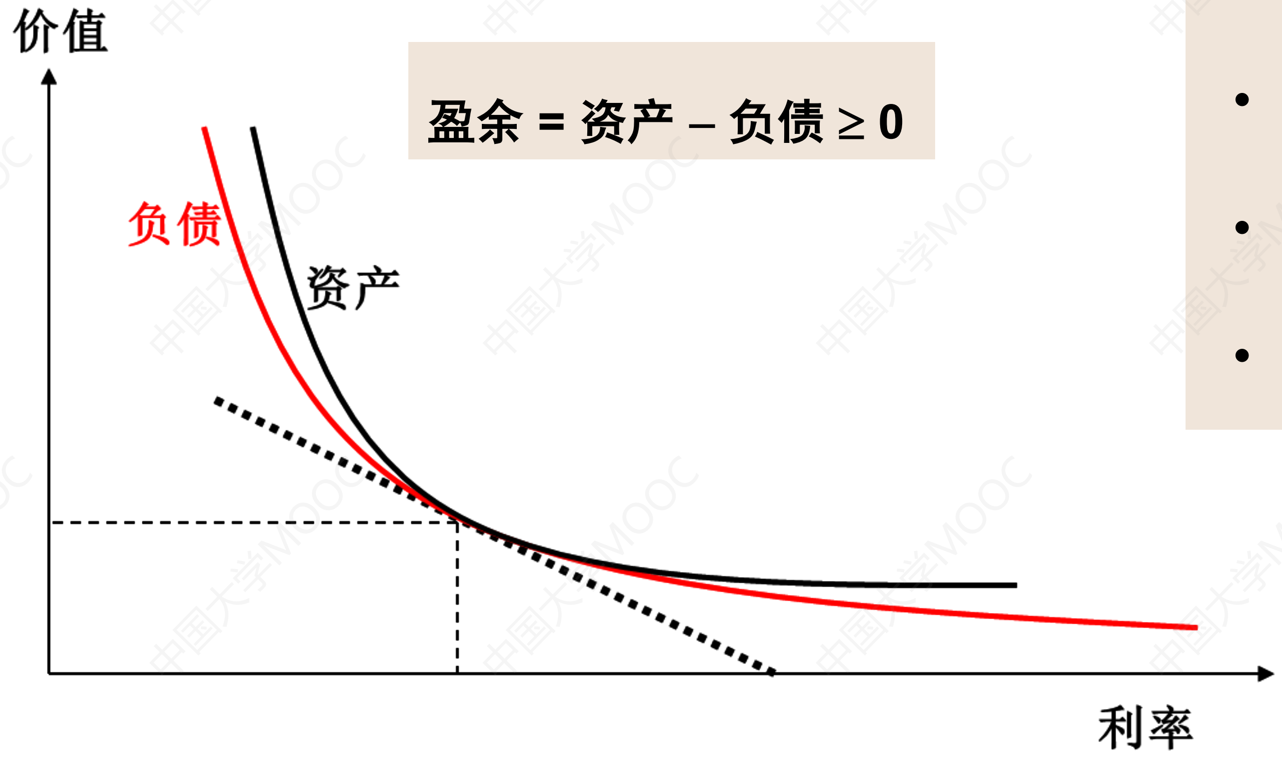
参见MOOC

	A	B	C	D	E	F	G
1	现金流	时间	贴现因子	现值	权重	时间*权重	时间^2*权重
2	110	1					
3	110	2					
4	110	3					
5	110	4					
6	110	5					
7	110	6					
8	110	7					
9	110	8					
10	110	9					
11	110	10					
12	110	11					
13	110	12					
14	110	13					
15	110	14					
16	1110	15					
17	债券的价格						
18	马考勒久期						
19	久期						
20	马考勒凸度						
21	凸度						

Redington免疫



- 盈余 = 资产 – 负债
- **假设**：未来负债 L_1，…，L_n，
- **问题**：如何安排投资A_1，…，A_m，使得利率无论如何变化，盈余不会小于零？



Redington免疫的条件：

- 现值相等
- 久期相等
- 资产的凸度 > 负债的凸度

- 盈余： $S(y)=P_A-P_L$
- 对盈余求一阶导数：

$$S'(y)=(P_A)'-(P_L)'=-D_A\times P_A+D_L\times P_L$$

- 对盈余求二阶导数：

$$S''(y)=(P_A)''-(P_L)''=C_A\times P_A-C_L\times P_L$$

- 如果免疫的三个条件得以满足，就有

$$S(y)=0,\qquad S'(y)=0,\qquad S''(y)>0$$

Redington免疫的条件：

- 现值相等
- 久期相等
- 资产的凸度 > 负债的凸度

$$S(y)=0,\quad S'(y)=0,\quad S''(y)>0$$

假设利率的变化为Δy，应用级数展开：

$$S(y+\Delta y)\approx S(y)+(\Delta y)S'(y)+\frac{1}{2}(\Delta y)^2 S''(y)>0$$

结论：若满足Redington免疫条件，利率发生微小变化，盈余不会减少。

例： 当前**年利率为6%**，公司借款1000万，期限10年，即10年末偿还1790.85万元。

为了防范利率风险，公司希望购买价值1000万元的债券实施免疫策略，假设可供选择的债券有三种，面值和偿还值均为1000元。

A：10年期，息票率6.7%。

B：15年期，息票率6.988%。

C：30年期，息票率5.9%。

公司应该如何选择上述三种债券？

Redington免疫的条件：

- 现值相等
- 久期相等
- 资产的凸度 > 负债的凸度

负债的马考勒久期：

- 负债：10

资产的马考勒久期：

- 债券A：7.6655
- 债券B：10
- 债券C：14.6361

Redington免疫的条件：

- 现值相等
- 久期相等
- 资产的凸度 > 负债的凸度

马考勒久期：

- 负债：10
- 债券A：7.6655
- 债券B：10
- 债券C：14.6361

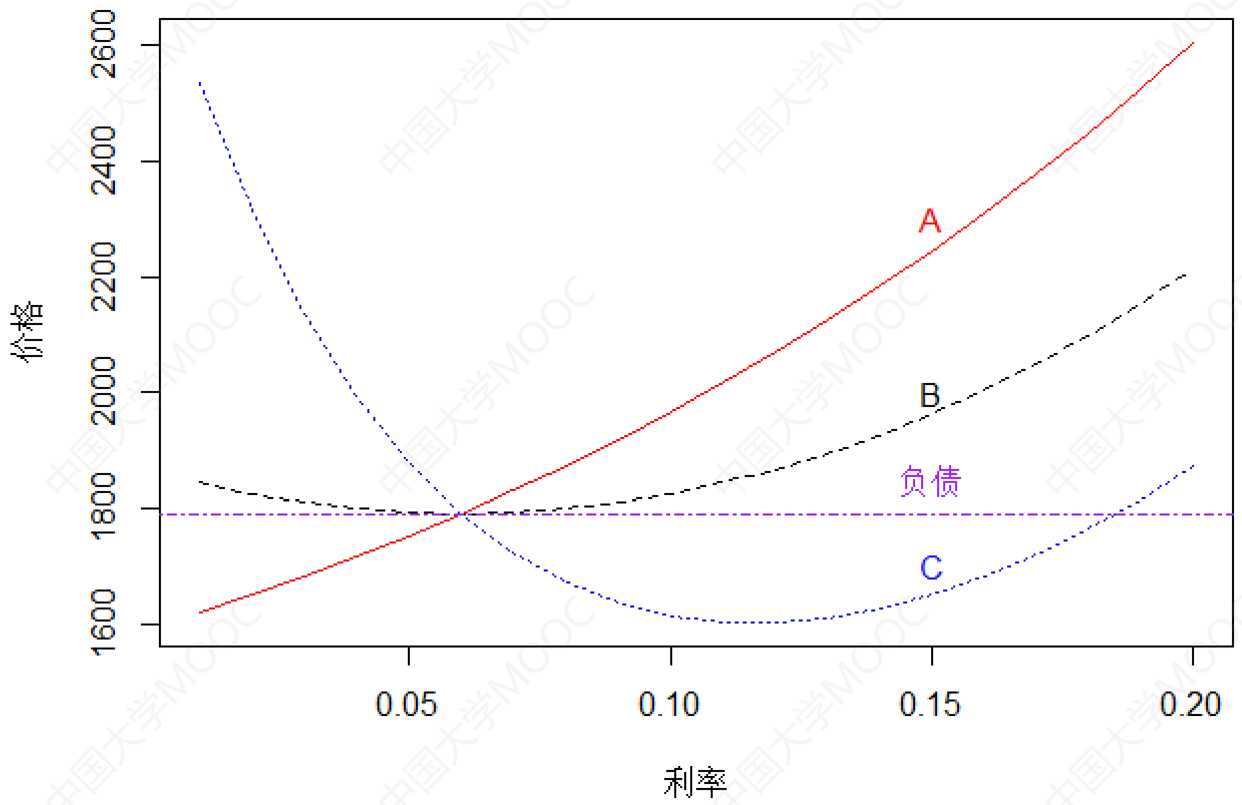
马考勒凸度：

- 负债：$10^2 = 100$
- 债券A：68.7346
- 债券B：126.4996
- 债券C：318.1085

Redington免疫的条件：

- 现值相等
- 久期相等
- 资产的凸度 > 负债的凸度

资产和负债在第10年末的累积值（当前利率 = 6%）



结论：B的凸度大于负债，购买B可以实现免疫。

问题：有更好的选择吗？

另一种选择：构造债券组合。

- 在A上投资w，在C上投资$(1 - w)$。
- 令组合的马考勒久期为：$7.6655w + 14.6361(1 - w) = 10$

  求得：$w = 66.509\%$

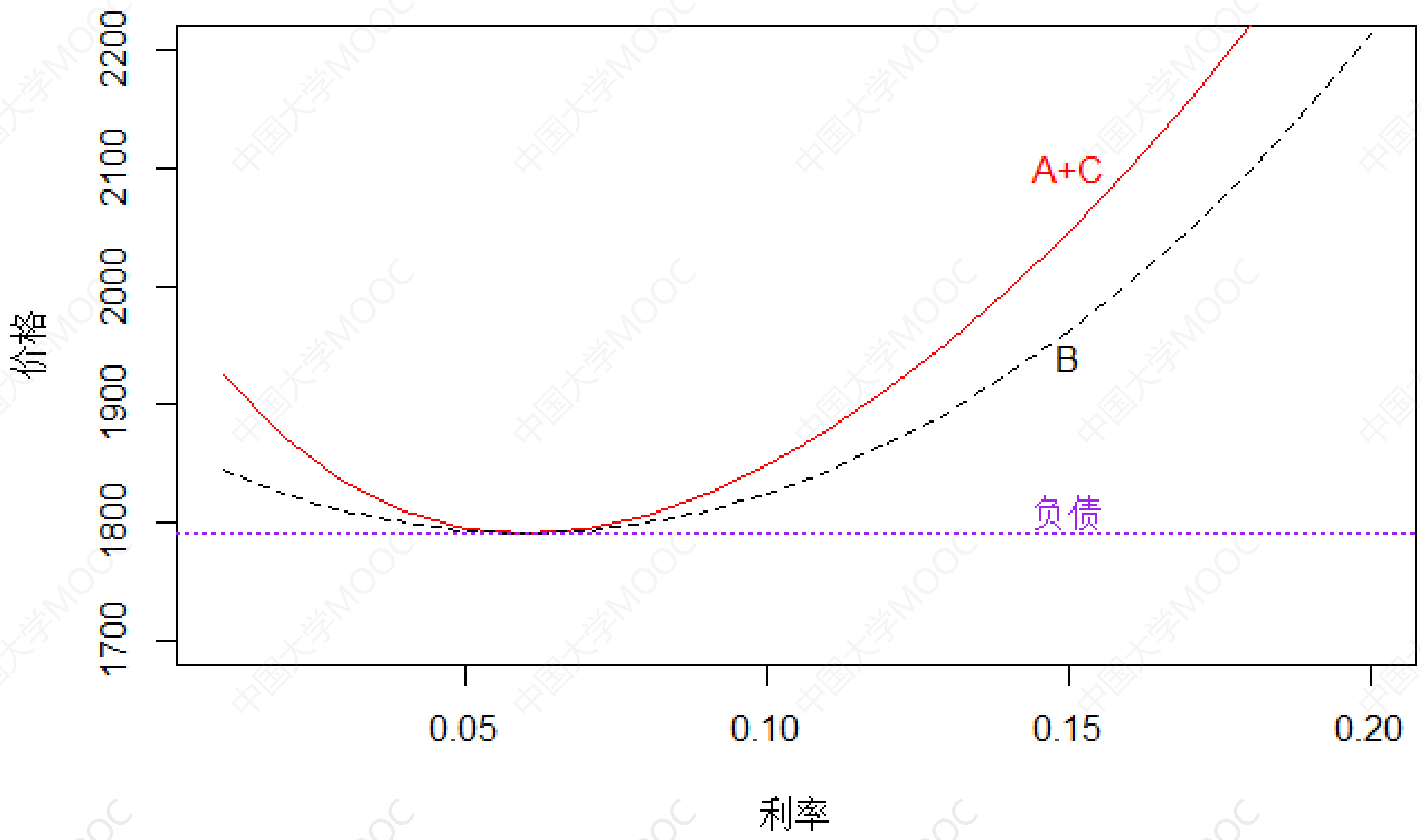
- 组合的马考勒凸度更大 (大于债券B的126.4996)：

  $68.7346 \times w + 318.1085 \times (1 - w) = 152.31$

马考勒久期：

- 负债：10
- 债券A：7.6655
- 债券B：10
- 债券C：14.6361

不同利率水平下，资产和负债在第10年末的价值



结论：组合的凸度更大，免疫能力更强。

完全免疫

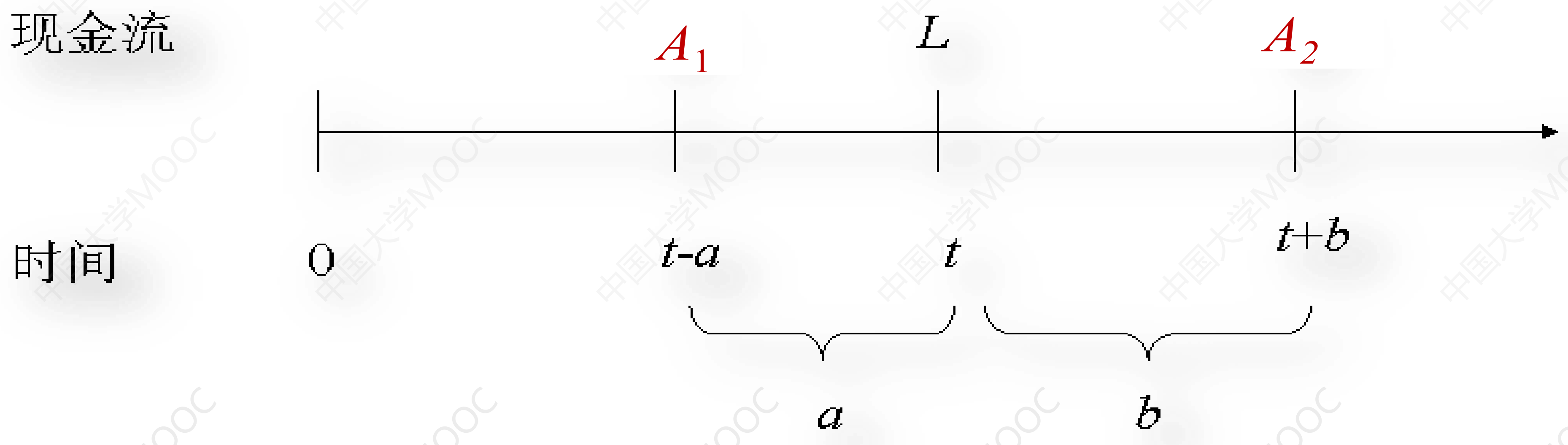
- Redington免疫：平坦的收益率曲线发生微小平移，盈余不会减少。
- 完全免疫：平坦的收益率曲线发生较大平移，盈余也不会减少。

完全免疫的条件（证明参见教材）：

（1）现值相等

（2）久期相等

（3）资产分布在负债的两端



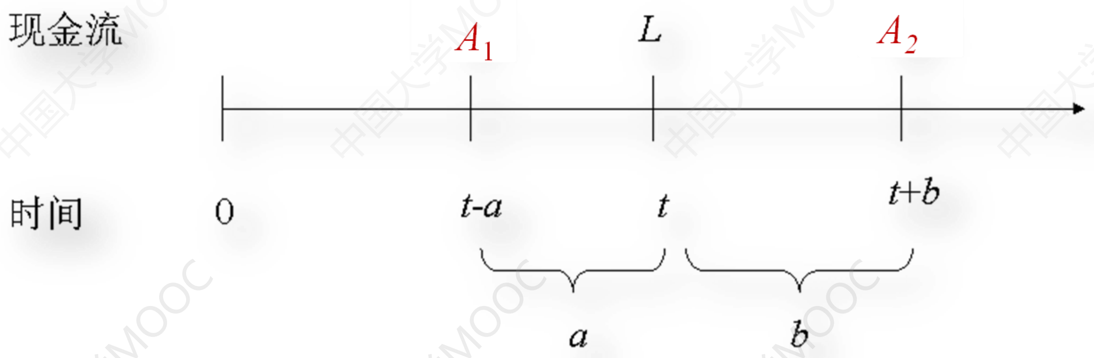
完全免疫	Redington免疫
现值相等	现值相等
久期相等	久期相等
资产分布在负债的两端	资产的凸度 ≥ 负债的凸度

结论： 如果满足完全免疫条件，必满足Redington免疫条件。

证明： 见下页

$$C_{马}=E\left[t^{2}\right]\qquad=\operatorname{var}(t)+[E(t)]^{2}\qquad=\operatorname{var}(t)+\left(D_{马}\right)^{2}$$

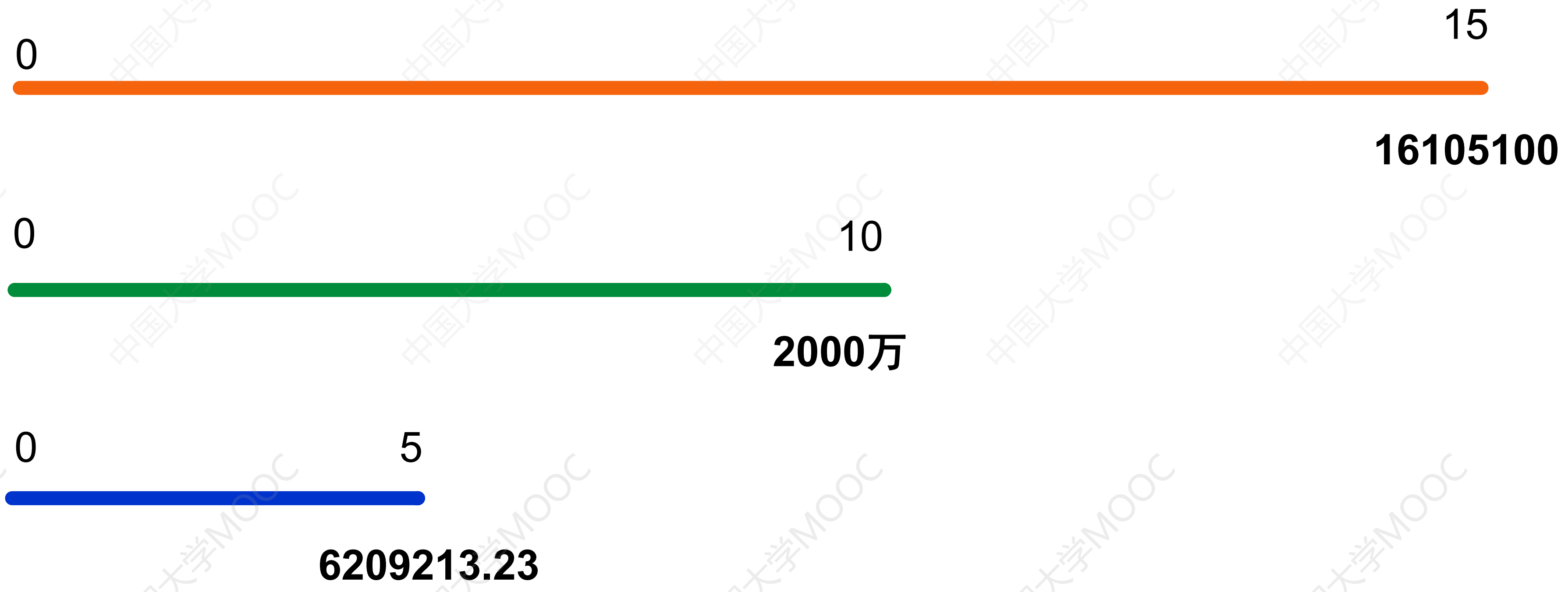
$$\Rightarrow\begin{cases}\text{负债的马考勒凸度：}C_{马1}=0+\left(D_{马}\right)^{2}\\ \\ \text{资产的马考勒凸度：}C_{马2}=\operatorname{var}(t)+\left(D_{马}\right)^{2}\end{cases}$$



例： 公司在10年末需偿还2000万元的债务；它现在有5年期的零息债券6209213.23元（到期价值）， 15年期的零息债券16105100元（到期价值）。

（1）当前年利率为10%，公司是否处于完全免疫状态？

（2）若年利率变为20%，公司的盈余将如何变化？



解：

- **负债的现值：** $$P_L = \frac{20000000}{1.10^{10}} = 7710865.79$$

- **资产的现值：** $$P_A = \frac{6209213.23}{1.10^5} + \frac{16105100}{1.10^{15}} = 7710865.79$$

- **负债的马考勒久期：10**
- **资产的马考勒久期：**

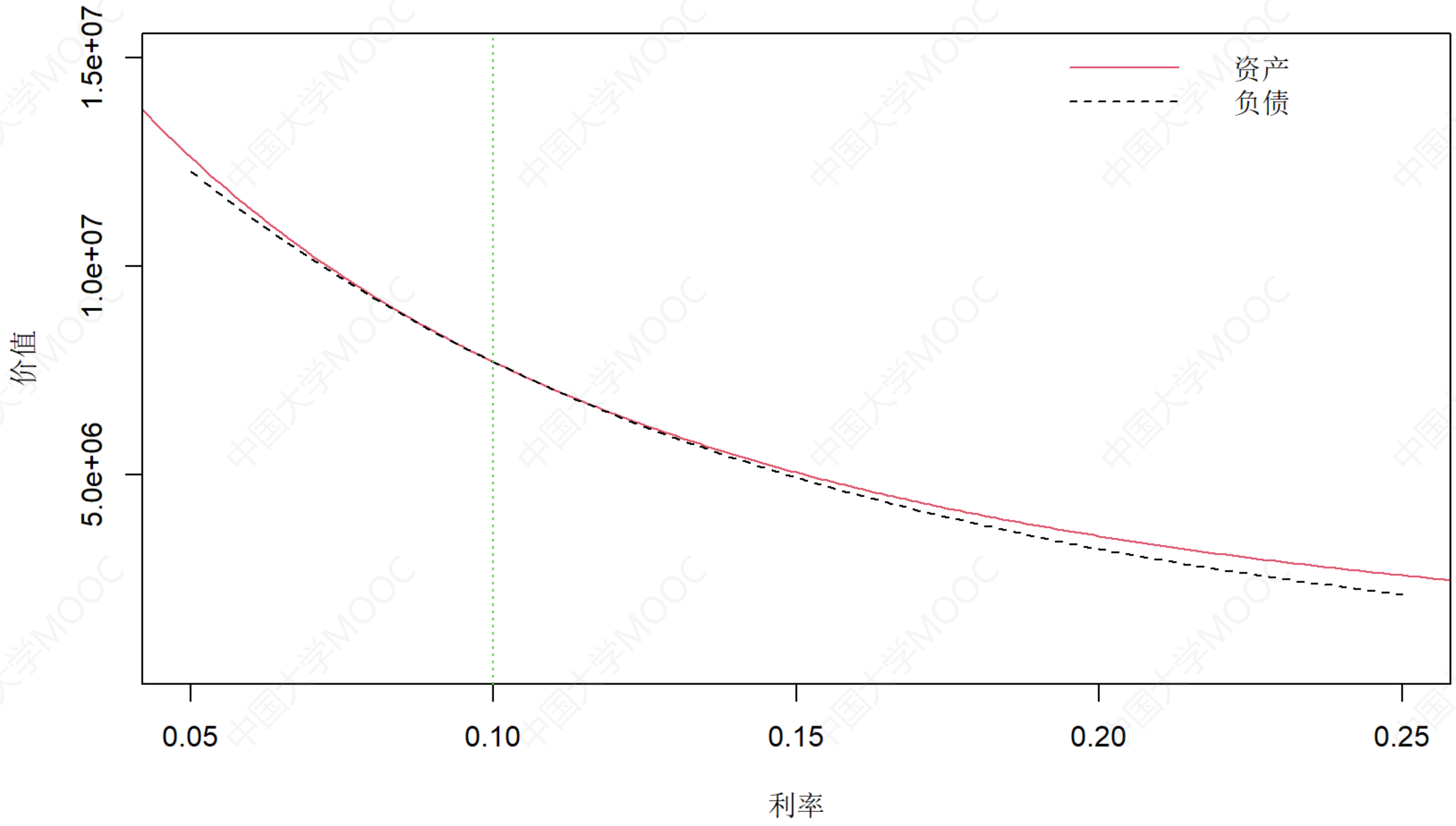
$$D_{马} = \frac{6209213.23 \times (1.10)^{-5} \times 5 + 16105100 \times (1.10)^{-15} \times 15}{7710865.79} = 10$$

完全免疫的第三个条件：5 < 10 < 15

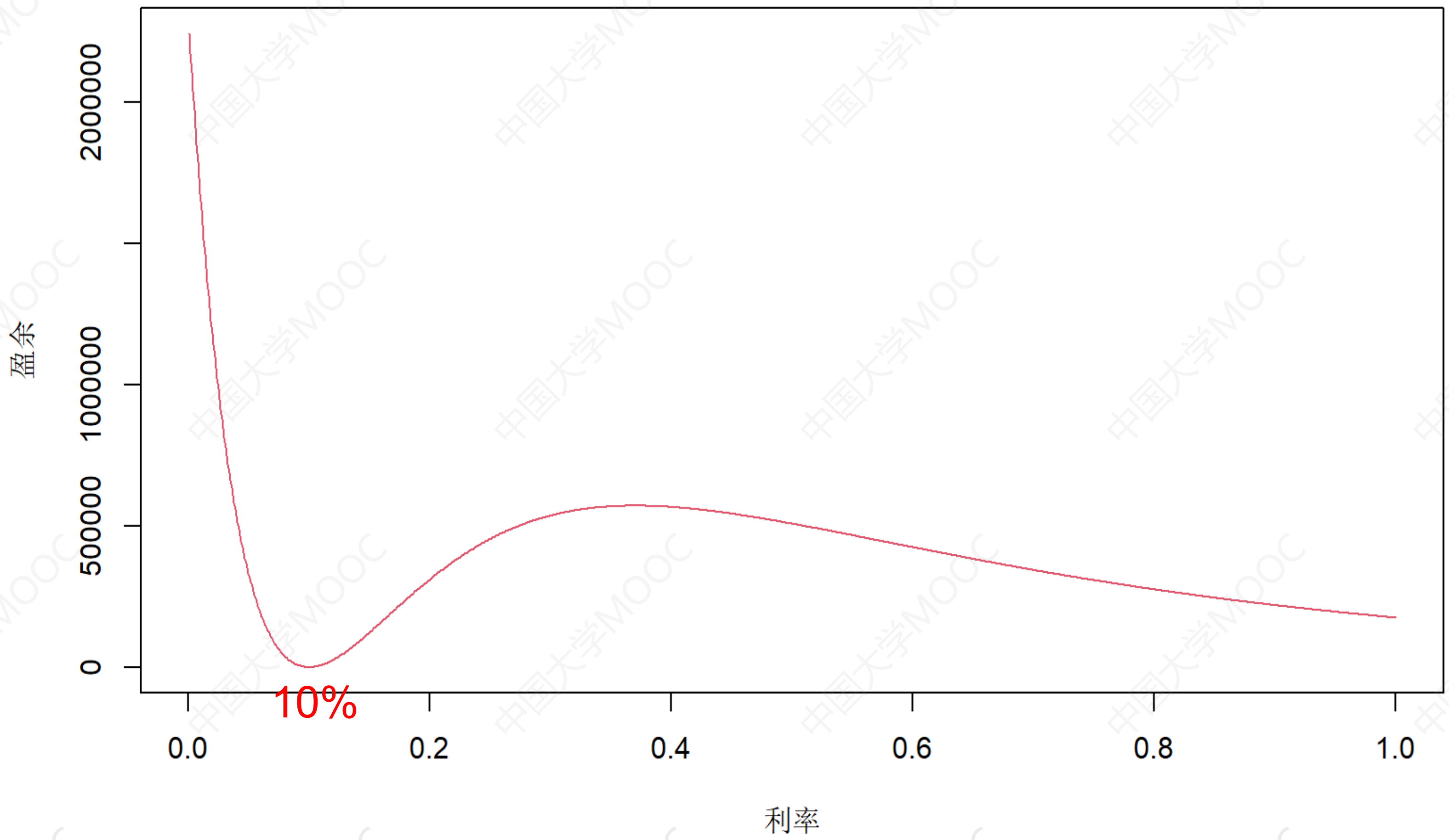
利率从10%变为20%，盈余为：

$$P_A - P_L = \frac{6209213.23}{1.2^5} + \frac{16105100}{1.2^{15}} - \frac{20000000}{1.2^{10}} = 310540.99(元)$$

公司处于完全免疫状态，利率的较大变化也会导致盈余增加（参见下图）。




```
x=seq(0.001,1,0.001)
A=6209213.23/(1+x)^5+16105100/(1+x)^15
plot(x,A,type='l',col=2,lty=1,ylab='价值',xlab='利率',xlim=c(0.05,0.25),ylim
= c(5.8e+5,1.5e+7))  #资产的价值
curve(20000000/(1+x)^10,col=1,lty=2,add=T)     #负债的价值
abline(v=0.1,col=3,lty=3)
legend('topright',c('资产','负债'),lty=c(1,2),col=c(2,1),bty='n')
```




```
x=seq(0.001,1,0.001)
S=6209213.23/(1+x)^5+16105100/(1+x)^15-20000000/(1+x)^10
plot(x,S,type='l',col=2,ylab='盈余',xlab='利率')
```

练习： 2年后到期的债务为$20000 。

可投资的资产为：

（1） 货币市场基金；

（2） 5年期零息债券。

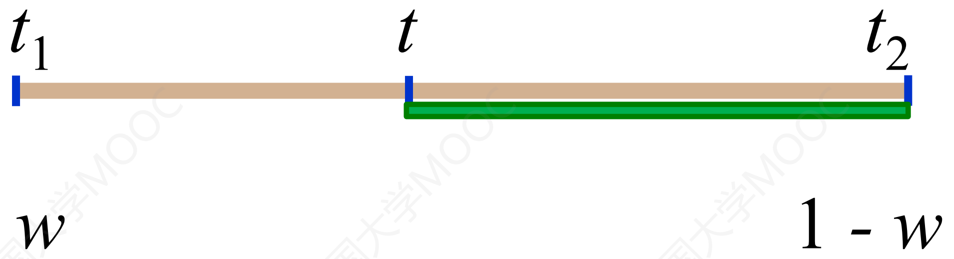
假设年有效利率为4%，如何配置投资来实施完全免疫策略？

解：

$$\begin{cases} a+b=20000(1+0.04)^{-2} & \text{现值相等} \\ \dfrac{a\times 0+b\times 5}{a+b}=2 & \text{久期相等} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a=11094.67,\quad b=7396.45$$

例：假设时间 t 有一笔负债到期，其现值为1个单位。为了实现完全免疫，在 t_1 和 t_2 到期的资产上分别投资多少？



现值相等：$w+(1-w)=1$

久期相等：$wt_1+(1-w)t_2=t$

$$w=\frac{t_2-t}{t_2-t_1}$$

现金流配比策略

- **原理：**对每一笔负债，配置一笔相同的资产
- **实施方法：**从最远期限的负债开始匹配，直至所有期限的负债都得到匹配。
- **特点：**
  - 简单，容易理解
  - 彻底回避了利率风险；
  - 灵活性较差，可能不易实施（没有合适期限的资产）。

例：公司未来3年的负债和三种可投资资产如下。如果实施现金流匹配策略？

	第1年末	第2年末	第3年末	资产数量
负债	1000	1000	1000	
资产1	50	50	500	2
剩余负债	900	900		
资产2	100	300		3
剩余负债	600			
资产3	200			3

例：公司的负债如下：

年度	1	2	3	4	5
负债	4090	6790	3550	36550	5250

可投资的资产现金流如下，如何实施现金流匹配策略？

5年期债券	5	5	5	5	105
4年期债券	10	10	10	110	
2年期债券	20	120			

现金流匹配过程

	1	2	3	4	5	购买数量
负债	4090	6790	3550	36550	5250	
5年期债券	250	250	250	250	5250	50
剩余负债	3840	6540	3300	36300	0	
4年期债券	3300	3300	3300	36300	0	330
剩余负债	540	3240	0	0	0	
2年期债券	540	3240	0	0	0	27

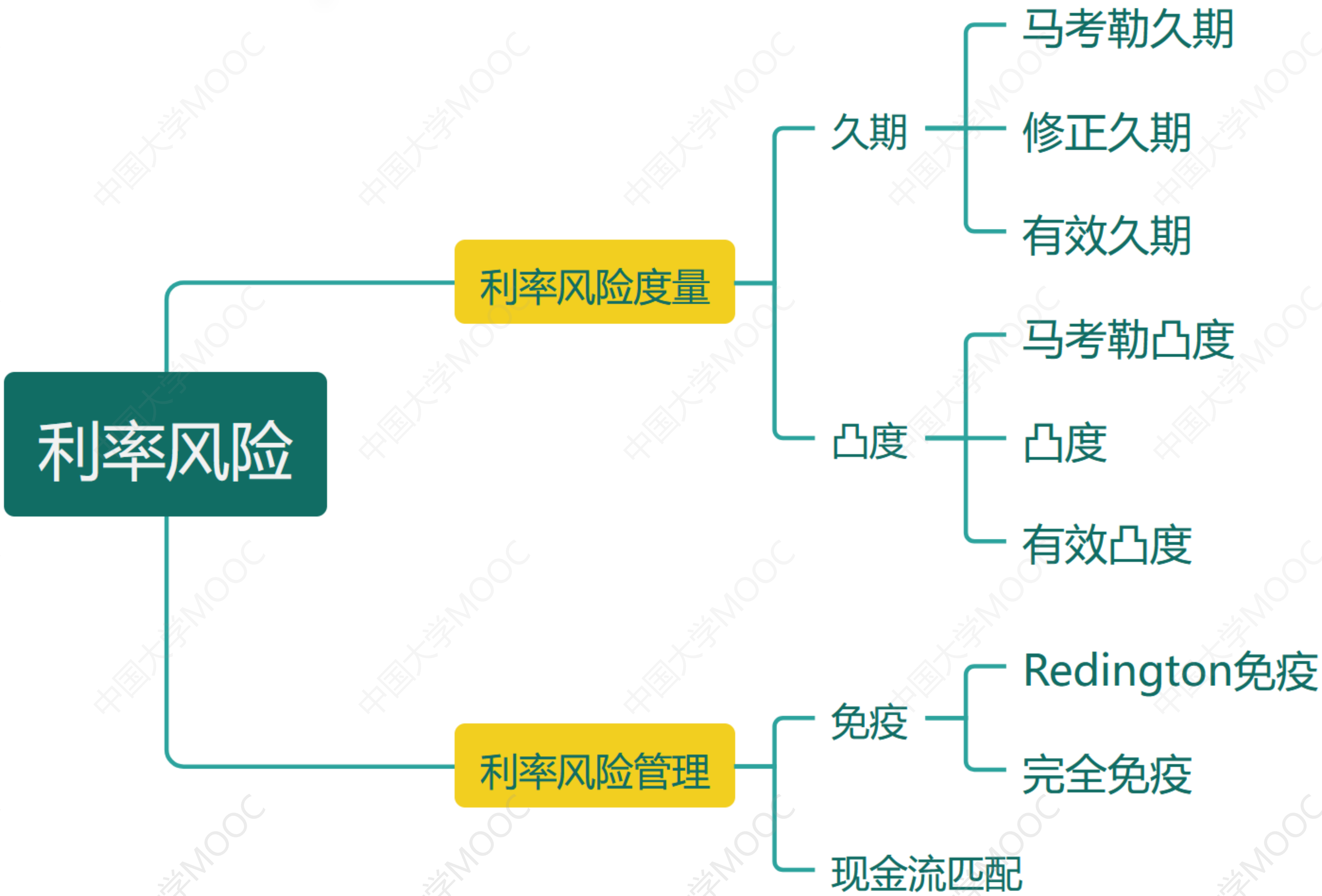
5年期债券	5	5	5	5	105
4年期债券	10	10	10	110	
2年期债券	20	120			

中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

利率风险

小结

孟生旺


利率风险
利率风险度量
久期
马考勒久期
修正久期
有效久期
凸度
马考勒凸度
凸度
有效凸度
利率风险管理
免疫
Redington免疫
完全免疫
现金流匹配

马考勒久期：

$$D_{马} = E(t) = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)}$$

马考勒凸度：

$$C_{马} = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = E\left(t^2\right)$$

久期（修正久期）：

$$D^{(m)} = -\frac{P'(y)}{P(y)}$$

$$y = i^{(m)}$$

凸度：

$$C^{(m)} = \frac{P''(y)}{P(y)}$$

马考勒凸度与马考勒久期的关系：

$$C_{马} = \mathrm{Var}(t) + D_{马}^2$$

$$E\left(t^2\right) = \mathrm{Var}(t) + \left(E(t)\right)^2$$

$$\Uparrow$$

$$\mathrm{Var}(t) = E\left(t^2\right) - \left(E(t)\right)^2$$

久期和凸度的关系：

基于
利息力

$$D_{马} = -\frac{P'(\delta)}{P(\delta)} = E(t)$$

$$C_{马} = \frac{P''(\delta)}{P(\delta)} = E(t^2)$$

基于
年名义利率

$$D^{(m)} = -\frac{P'(y)}{P(y)}$$

$$C^{(m)} = \frac{P''(y)}{P(y)}$$

$$y = i^{(m)} \xrightarrow{m \to \infty} \delta$$

$$D^{(\infty)} = D_{马}$$

$$C^{(\infty)} = C_{马}$$

对于 $m > 0$，有：

$$D^{(m)} = D_{马} \cdot \mathrm{e}^{-\frac{\delta}{m}}$$

贴现1/m年

$$C^{(m)} = \left(\frac{D_{马}}{m} + C_{马}\right) \cdot \mathrm{e}^{-\frac{2\delta}{m}}$$

贴现2/m年

对于 $m = 1$，有：

$$D = D_{马} \cdot \mathrm{e}^{-\delta}$$

贴现1年

$$C = \left(D_{马} + C_{马}\right) \cdot \mathrm{e}^{-2\delta}$$

贴现2年

有效久期和有效凸度：近似计算久期和凸度

$$D_{\text{效}} = -\frac{P_+ - P_-}{P(2\Delta y)}$$

$$C_{\text{效}} = \frac{(P_+ + P_- - 2P)}{(\Delta y)^2 P}$$

资产组合的久期和凸度：

$$D = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} D_k$$

$$C = \sum_{k=1}^{n} \frac{P_k}{P} C_k$$

用久期和凸度近似计算资产价格变化的百分比：

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^{(m)} \cdot (\Delta y)$$

$$y = i^{(m)} \xrightarrow{m \to \infty} \delta$$

$$\frac{\Delta P}{P} \approx -D^{(m)} \cdot (\Delta y) + \frac{1}{2} \cdot C^{(m)} \cdot (\Delta y)^2$$

基于久期和凸度的利率风险管理

Redington免疫：

（1）现值相等

（2）久期相等

（3）资产的凸度 > 负债的凸度

完全免疫：

（1）现值相等

（2）久期相等

（3）资产分布在负债的两端