利息度量

孟生旺

中国人民大学 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

中国人民大学MOOC

什么是利息度量？

- 利息：资金增量
- 利息度量（利率）：单位资金、单位时间的资金增量
  - 单位时间？ 年、月、日、20天
- 利率的种类：年利率、月利率、日利率、瞬时利率（利息力）…
- 在现实生活中，利率的常见表现形式？年化利率（年名义利率）
- 各种利息度量（利率）之间的转化关系？

中国大学MOOC

- 利息度量
  - 累积函数、贴现函数
  - 有效利率、有效贴现率
  - 名义利率、名义贴现率
  - 利息力（连续复利）

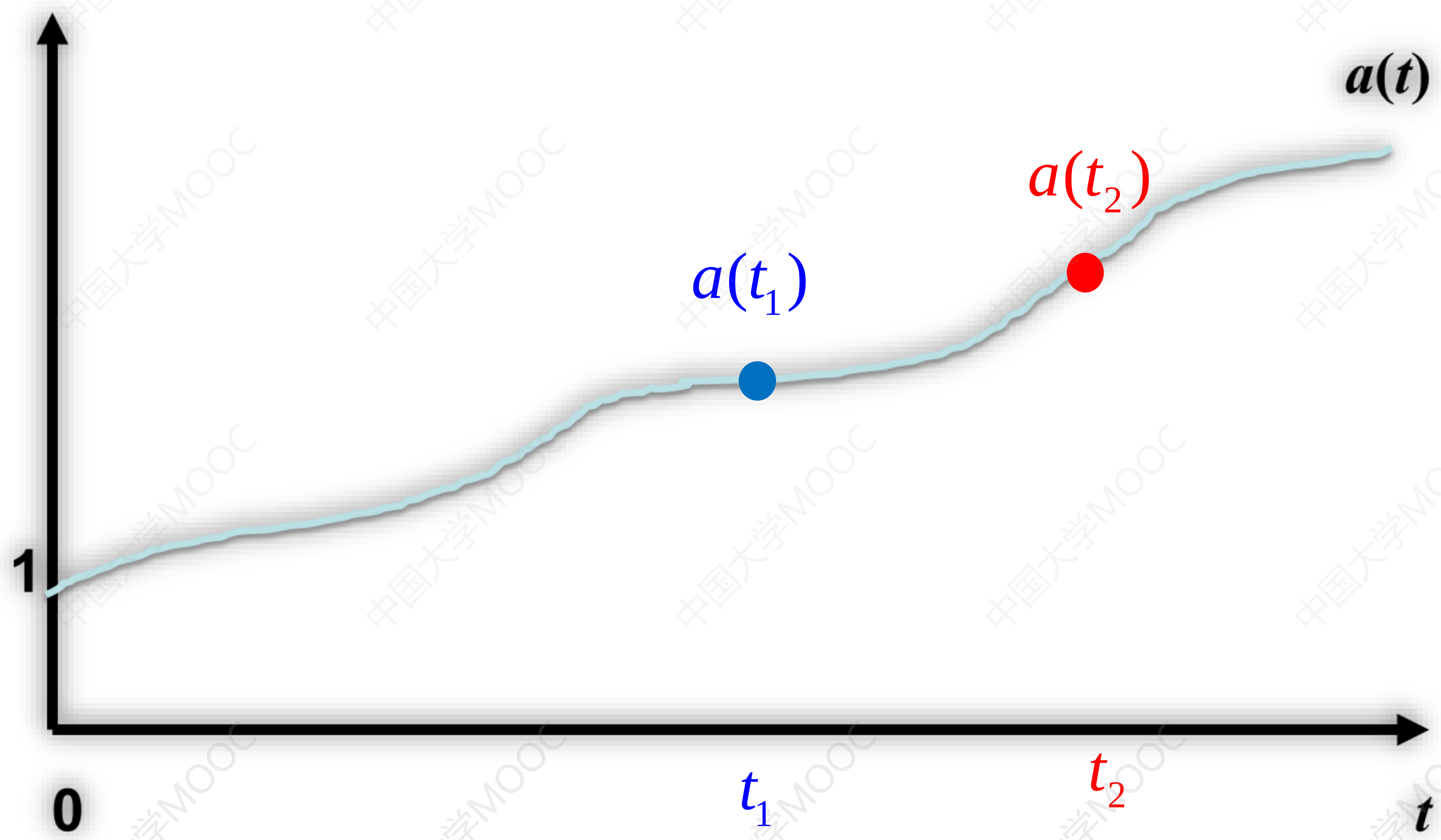
中国大学MOOC

累积函数

- 定义：时间零点的1元在时间 t 的累积值, 记为 $a(t)$
- 性质：描述资金随着时间增长变化的过程。利息度量的基础。
  - $a(0) = 1$；
  - $a(t)$ 通常是时间的增函数；
  - 当利息是连续产生时，$a(t)$ 是时间的连续函数。

中国大学MOOC

累积函数

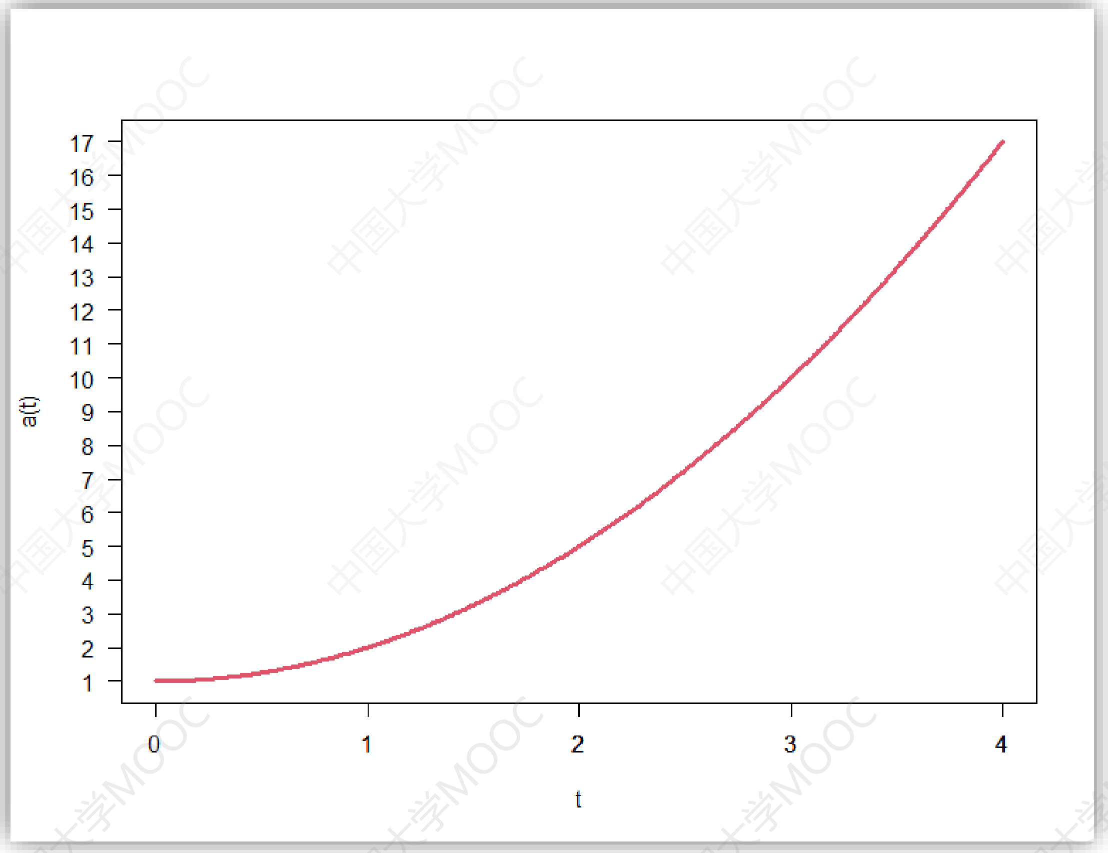


中国大学MOOC

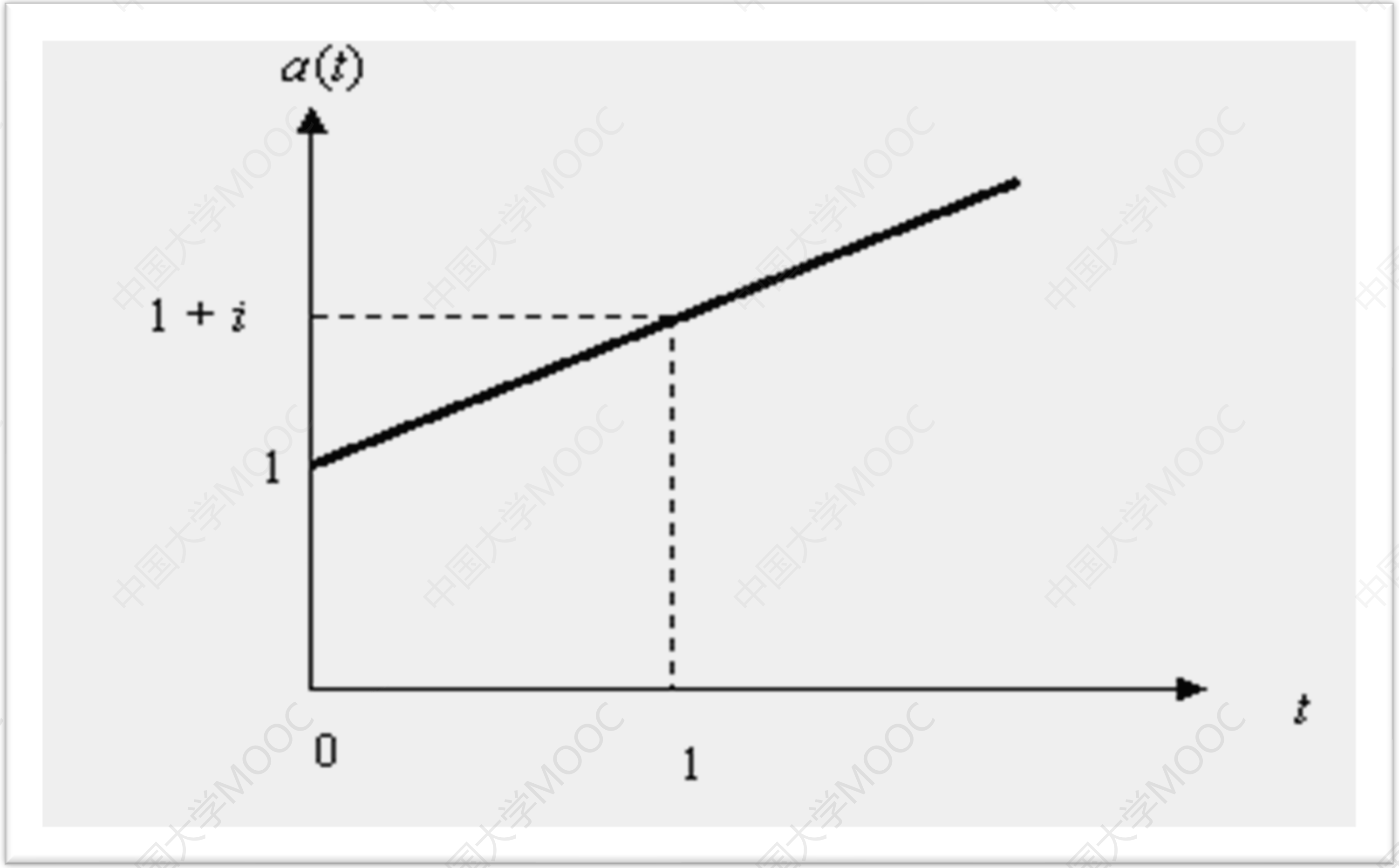
例： 假设累积函数为 $a(t)=1+t^2$

计算 t = 0时的500元，在 t = 2 的累积值。

解：



例：单利的累积函数

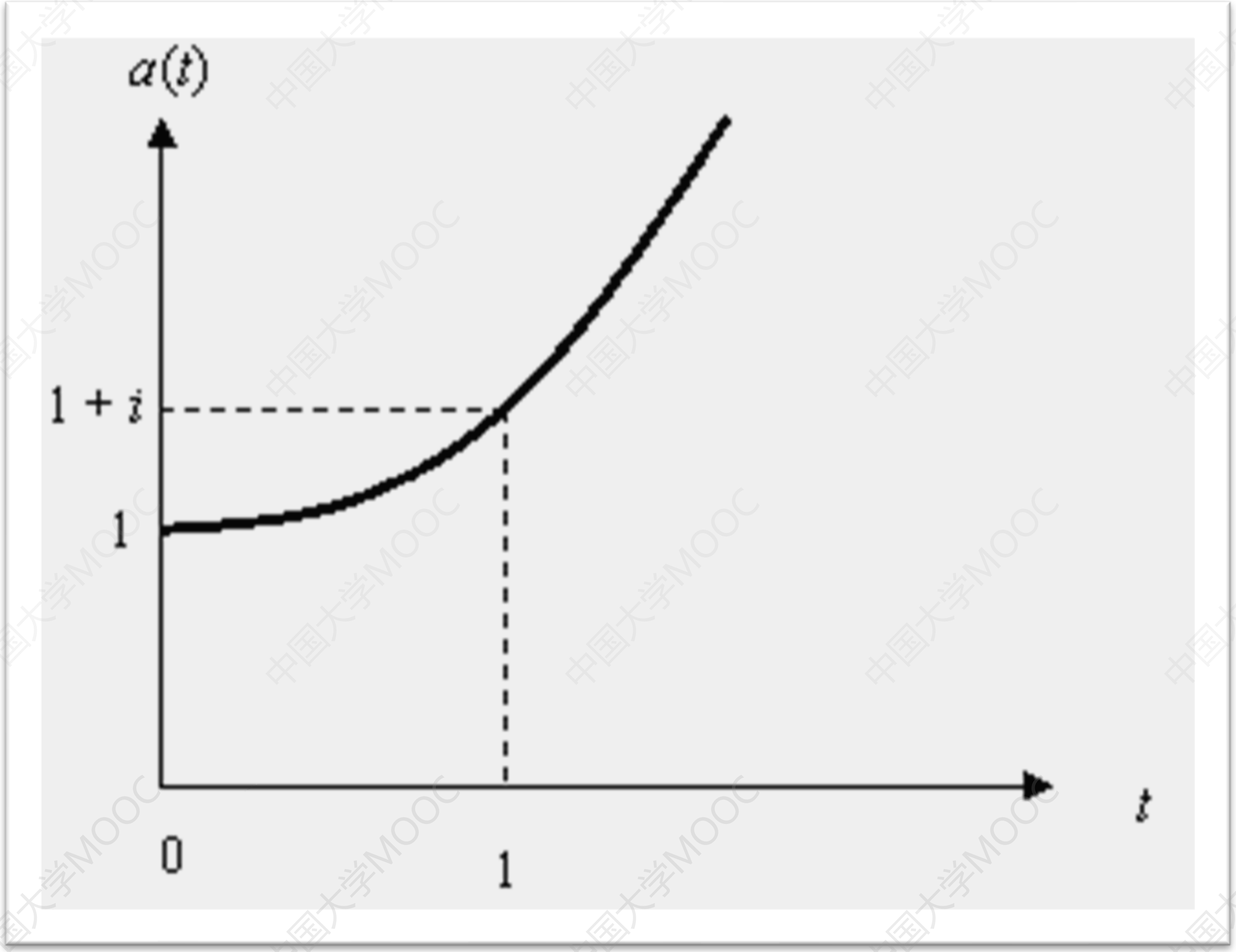


$$a(t) = 1 + it$$

中国大学MOOC

例：复利的积累函数

$$a(t) = (1+i)^t$$



中国大学MOOC

贴现函数

- **定义：时间 t 的1元在时间零点的现值, 记为** $a^{-1}(t)$
- **性质：与累积函数 $a(t)$ 互为倒数**

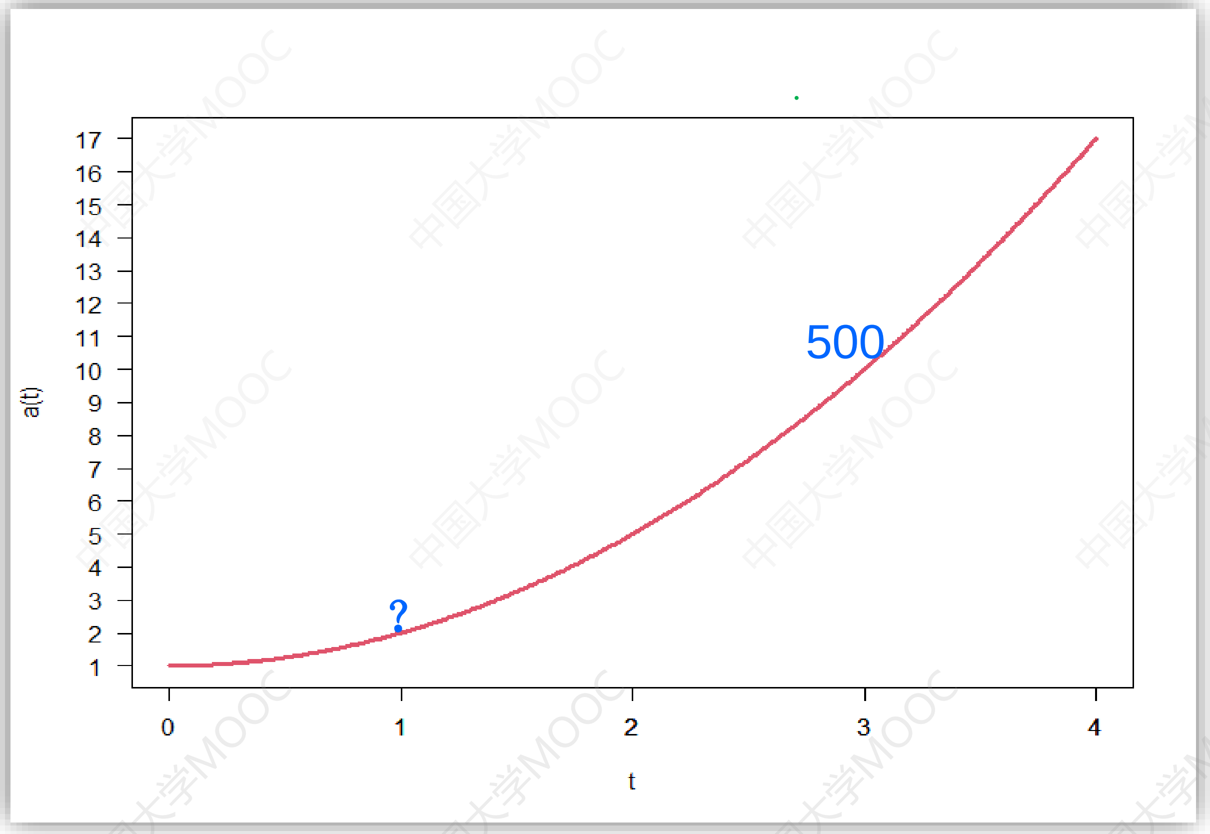
中国大学MOOC

例：累积函数为 $a(t)=1+t^2$，计算：（1） t = 3时的500元在 t = 0 的价值，（2） t = 3时的500元在 t = 1时的价值。

解：

（1） $500\times(1+3^2)^{-1}$

（2） $500\times(1+3^2)^{-1}\times(1+1^2)$



中国人民大学MOOC

例：常用的贴现函数

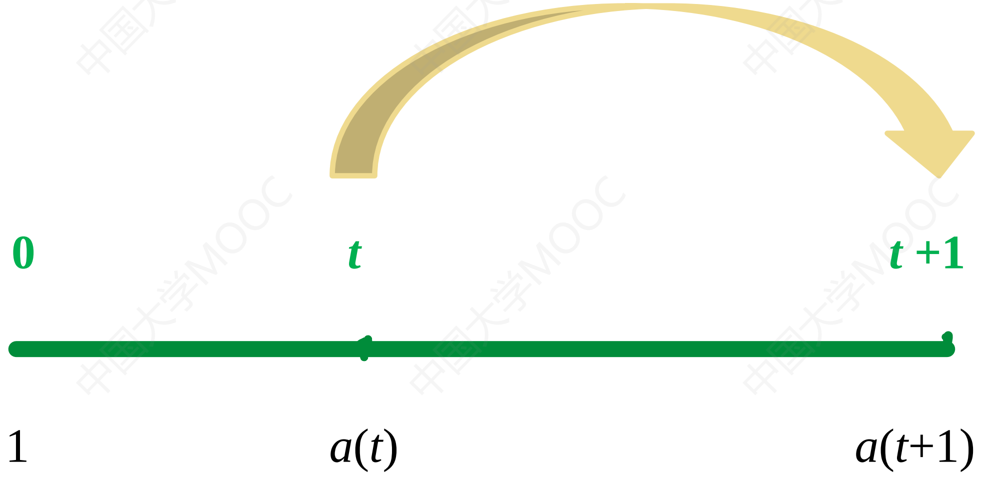
- 单利的贴现函数 $a^{-1}(t)=(1+it)^{-1}$ $a(t)=1+it$
- 复利的贴现函数 $a^{-1}(t)=(1+i)^{-t}$ $a(t)=(1+i)^{t}$

注：除非特别申明，今后一概使用复利。

中国大学MOOC

有效利率（实际利率）

- **期末的利息与期初本金之比**



$$i=\frac{\text{期末利息}}{\text{期初本金}}=\frac{\text{期末累积值}-\text{期初本金}}{\text{期初本金}}=\frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)}$$

中国大学MOOC

注：

- 有效利率用百分比表示，如8%
- 利息在期末支付
- 通常使用的时间单位是年
- 如无特殊说明，利率是指年利率

中国大学MOOC

例：1000元存入银行，第1年末存款余额为1020元，第2年末存款余额为1050元，求：第一年和第二年的有效利率分别是多少？整个存款期间（2年期间）的有效利率是多少？

$$i_1 = \frac{20}{1000} = 2\%$$

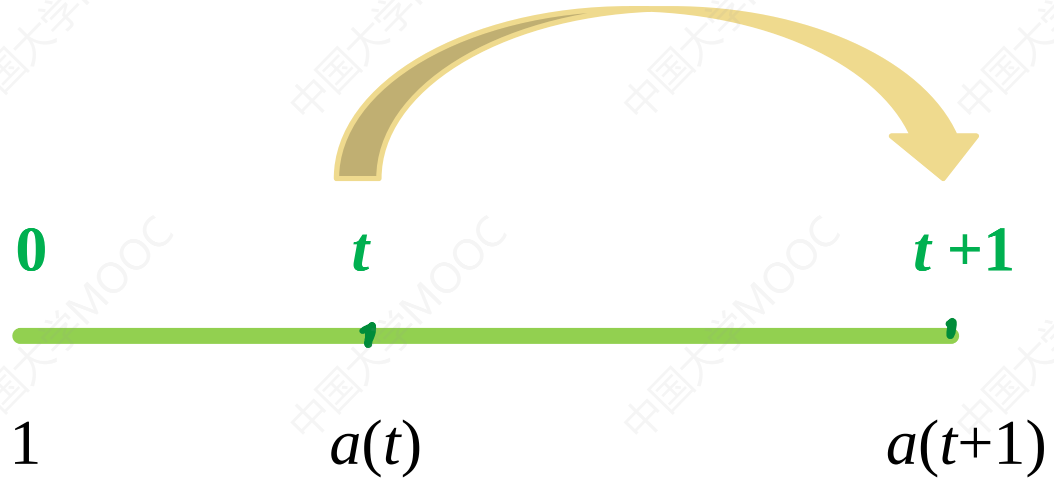
$$i_2 = \frac{30}{1020} = 2.94\%$$

$$i = \frac{50}{1000} = 5\%$$

中国大学MOOC

例：单利的有效利率是递减的

单利的累积函数：$a(t)=1+it$



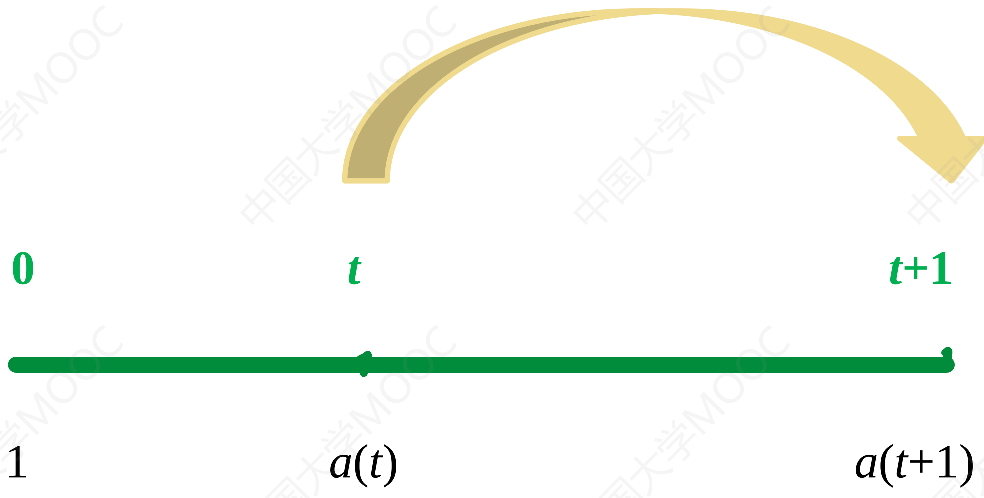
考虑时间区间 (*t*， *t* + 1)：

$$i_t=\frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)}=\frac{\left[1+i(t+1)\right]-\left(1+it\right)}{1+it}=\frac{i}{1+it}$$

中国人民大学MOOC

例：复利的有效利率是常数

复利的累积函数：$a(t)=(1+i)^t$



考虑时间区间 $(t,\ t+1)$

$$i_t=\frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)}=\frac{(1+i)^{t+1}-(1+i)^t}{(1+i)^t}=i$$

中国人民大学MOOC

有效利率的类型

- **有效利率可以定义在任意长度的时间区间：**
  - 年有效利率
  - 月有效利率
  - 日有效利率
  - 12天的有效利率
  - ……
- **注：通常会年化表示，即表示为年名义利率（年化收益率）**

中国大学MOOC

计息时间

约定：利率表示为年利率，如 $a(t)=1+it$

投资时间：2020年1月6日 ~ 2020年5月7日，如何确定时间 t 是多少年？

t = 投资天数 ÷ 每年的天数

中国大学MOOC

时间*t* 的计算惯例

（1）“实际/365”规则（actual/ actual）：投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按365天计算。

（2）“实际/360 ”规则：投资天数按两个日期之间的实际天数计算，每年按360天计算。称为银行家规则 (banker’s rule)。

（3）“ 30/360 ”规则：每月按30天计算, 每年按360天计算。

$$\left[360(Y_2-Y_1)+30(M_2-M_1)+(D_2-D_1)\right]/360$$

中国人民大学MOOC

例：投资者在2019年6月14日存入基金10000元，2020年2月7日取出，基金按单利计息，年利率为8%，分别根据下列规则计算投资者可以获得的利息金额：

（1）“实际/365”规则

（2）“实际/360” 规则

（3）“30/360” 规则

中国大学MOOC

2019 年 6 月 14 日　-　2020 年 2 月 7 日

（1）在“实际/365”规则下，实际投资天数为 238，

t **= 238/365**

利息金额为： $$10000\times0.08\times\frac{238}{365}=521.6$$

中国大学MOOC

2019 年 6 月 14 日 - 2020 年 2 月 7 日

（2）在“实际/360”规则下，实际投资天数为 238，

$t = 238/360$

利息金额为： $10000 \times 0.08 \times \dfrac{238}{360} = 528.9$

中国大学MOOC

2019 年 6 月 14 日 - 2020 年 2 月 7 日

（3）在“**30/360**”规则下，投资天数为：

$$360\times(2020-2019)+30\times(2-6)+(7-14)=233$$

故 t = 233/360

利息金额为： $10000\times0.08\times\dfrac{233}{360}=517.8$

中国大学MOOC

应用EXCEL计算（自学MOOC中的视频）

	A	B
1	例：投资者在2019年6月14日存入基金10000元，2020年2月7日取出，基金按单利计息，年利率为8%，分别根据下列规则计算投资者可以获得的利息金额：	
2	(1)“实际/365”规则	
3	(2)“实际/360”规则	
4	(3)“30/360”规则	
5		
6		
7		
8		
9		
10		
11		

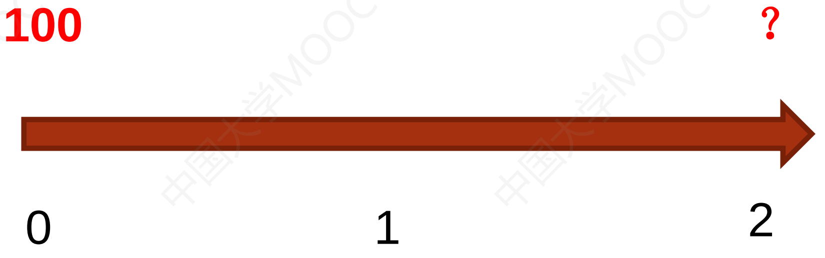
中国大学MOOC

单利和复利的比较

例：时间零点投资100万元，期限2年，单利的年利率为5%，计算第2年末的累积值。

（1）一次性投资2年

（2）先投资1年，到期后再投资1年。



解：$a(t) = 1 + it$

（1）100 ×（1 + 5%×2 ）= 110

（2）100 ×（1 + 5%） = 105

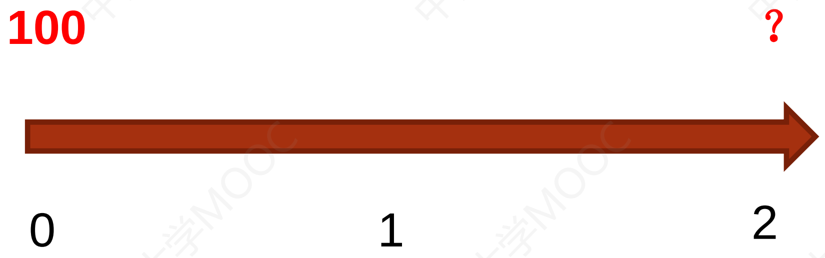
105 ×（1 + 5%） = 110.25

中国大学MOOC

例：时间零点投资100万元，期限2年，复利的年利率为5%，计算第2年末的累积值。

（1）一次性投资2年

（2）先投资1年，到期后再投资1年。



解： $a(t) = (1+i)^t$

（1）100 ×(1 + 5%)^2 = 110.25

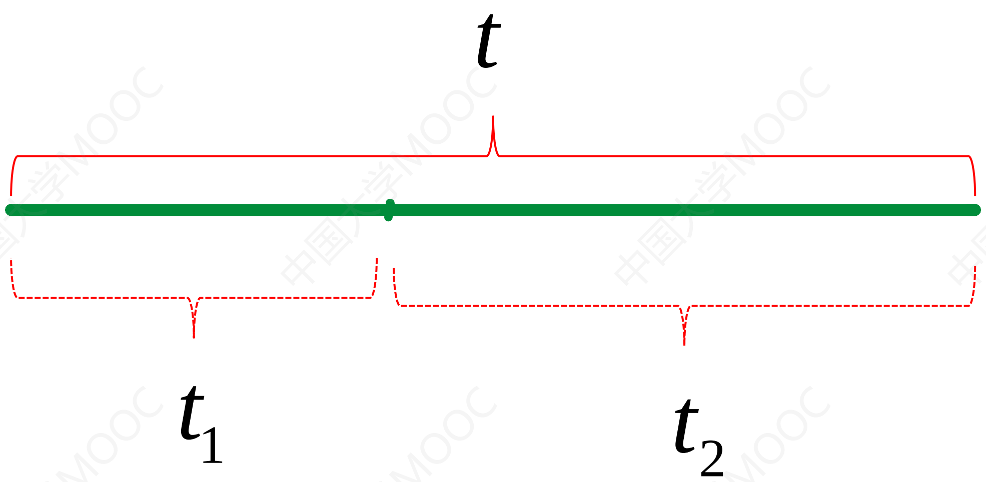
（2）100 ×(1 + 5%) = 105

105 ×(1 + 5%) = 110.25

中国大学MOOC

单利的缺陷：不满足一致性（分段投资产生更大的累积值）

若$t=t_1+t_2$，　　则$a(t_1)a(t_2)>a(t)$



证明：

$$a(t_1)a(t_2)=(1+it_1)(1+it_2)$$

$$=1+it+i^2t_1t_2$$

$$>(1+it)$$

$$=a(t)$$

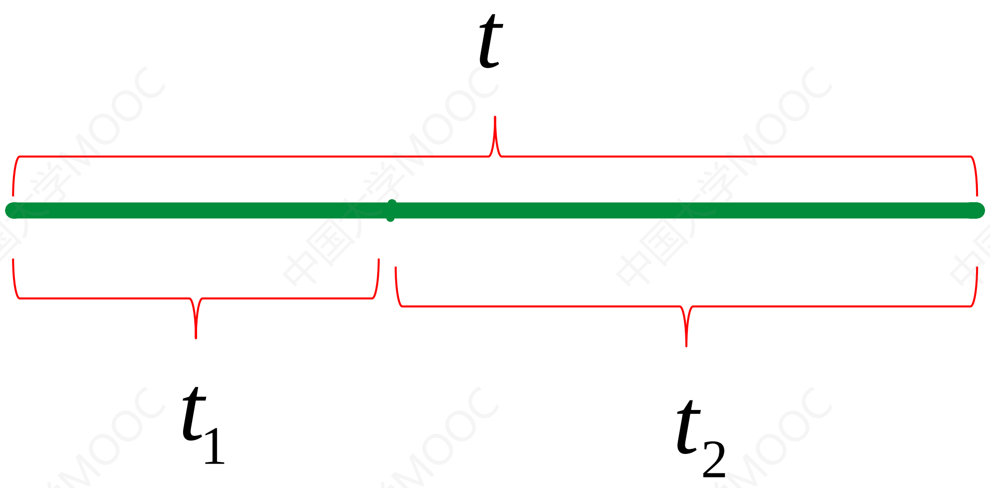
中国大学MOOC

复利满足一致性

$$a(t_1)a(t_2)=(1+i)^{t_1}(1+i)^{t_2}$$

$$=(1+i)^{t_1+t_2}$$

$$=a(t)$$



$$a(t_1)a(t_2)=a(t)$$

中国大学MOOC

例：单利的年利率为 i，如果把1年划分为 n 个等间隔的时间段进行投资，年末的累积值是多少？当 $n\to\infty$ 时会怎样？

0　　1/n　　2/n　　3/n　　1

$\left(1+\frac{i}{n}\right)$　　$\left(1+\frac{i}{n}\right)^2$　　$\left(1+\frac{i}{n}\right)^3$　　$\left(1+\frac{i}{n}\right)^n$

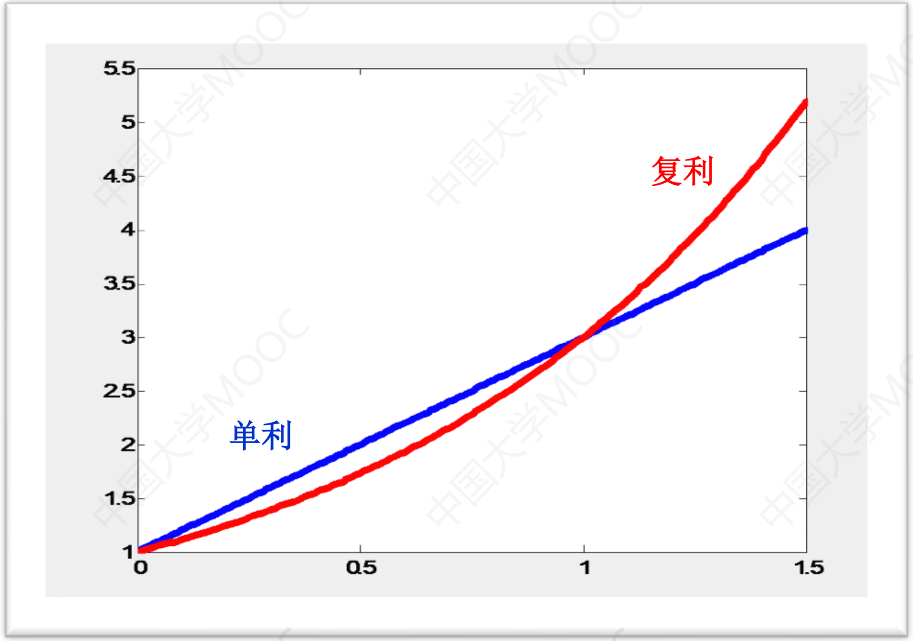
$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{i}{n}\right)^n = \mathrm{e}^i$$

注：此时 i 是年名义利率，称作利息力（瞬时利率，连续复利），后面详细介绍

中国大学MOOC

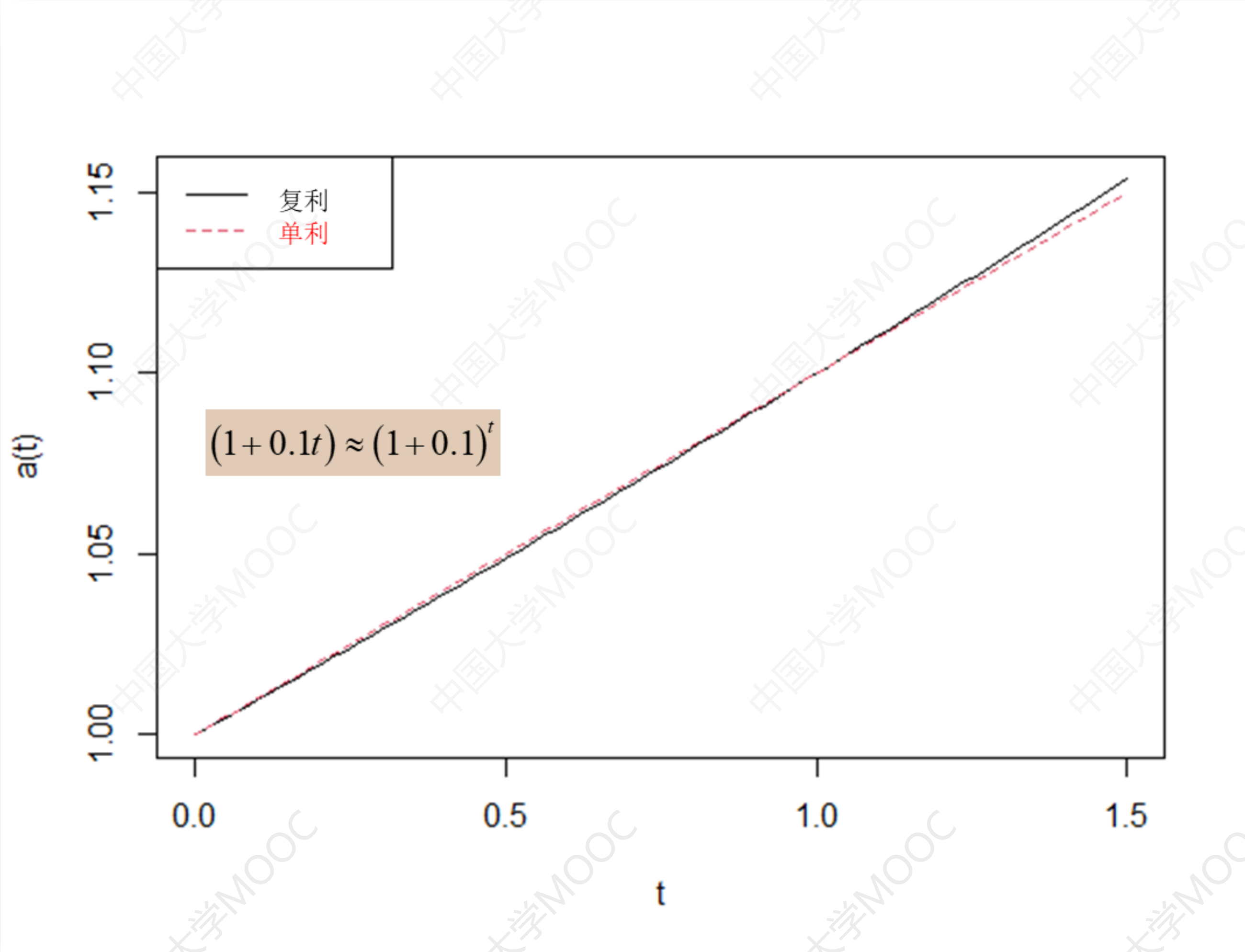
单利与复利的比较

- 单利的**本金**恒定，复利在前期的利息转为后期的本金
- 单利的**有效利率**逐期递减，复利的有效利率为常数。
- 当 $t = 0$ 或 1 时，单利和复利产生相同的累积值: $1 + i$
- 当 $0 < t < 1$ 时，单利比复利产生更大的积累值: $(1+it) > (1+i)^t$
- 当 $t > 1$时，复利比单利产生更大的积累值: $(1+it) < (1+i)^t$



中国大学MOOC

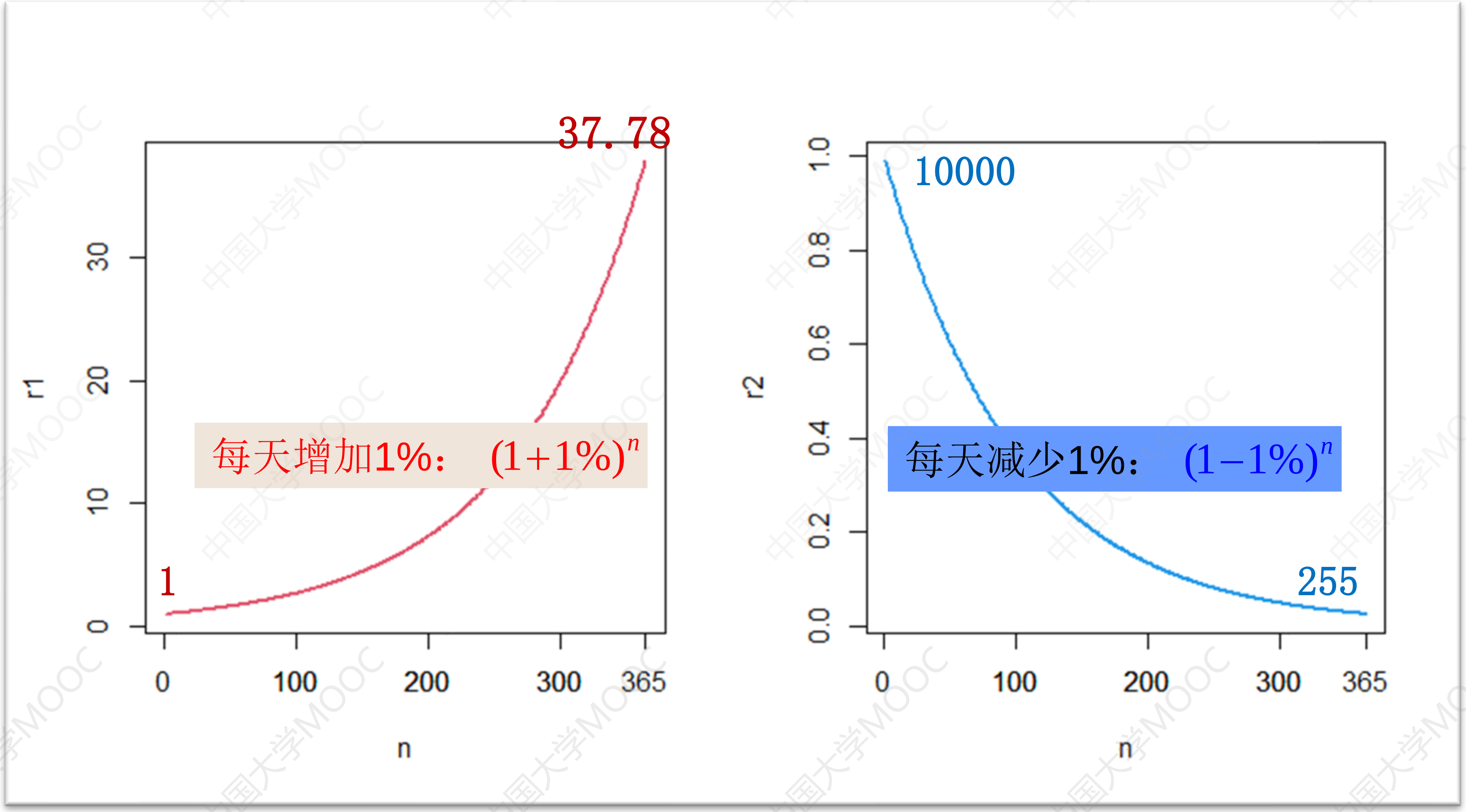
单利和复利的累积函数（$i = 10\%$）



当$t<1$时，$(1+i)^t \approx (1+it)$

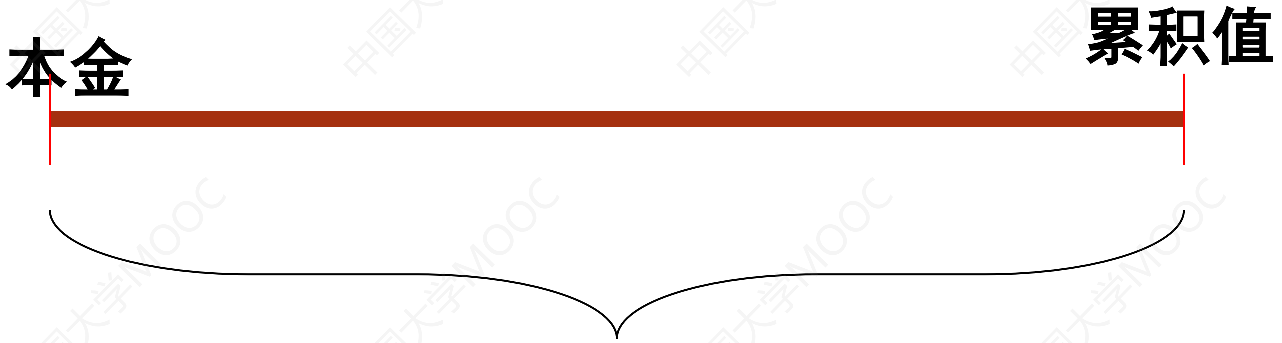
中国大学MOOC

复利： 长期坚持的重要性


37.78
1
每天增加1%： $(1+1\%)^n$
r1
0
10
20
30
0
100
200
300
365
n
10000
255
每天减少1%： $(1-1\%)^n$
r2
0.0
0.2
0.4
0.6
0.8
1.0
0
100
200
300
365
n

有效贴现率（实际贴现率）

$$\text{有效利率}(i)=\frac{\text{期末利息}}{\text{期初本金}}\qquad\qquad \text{有效贴现率}(d)=\frac{\text{期末利息}}{\text{期末累积值}}$$

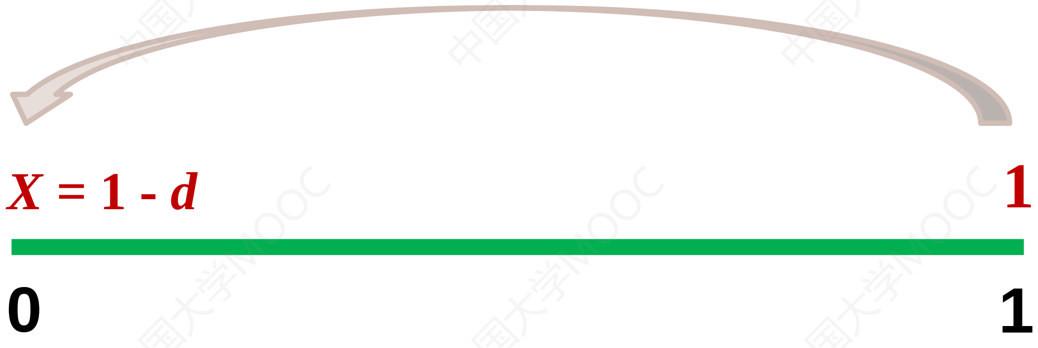


利息 = 累积值 － 本金

注：可以在任意时间区间定义有效贴现率

中国大学MOOC

例：**如果年有效贴现率为 d，则年末的1元在年初的现值为 $1-d$**



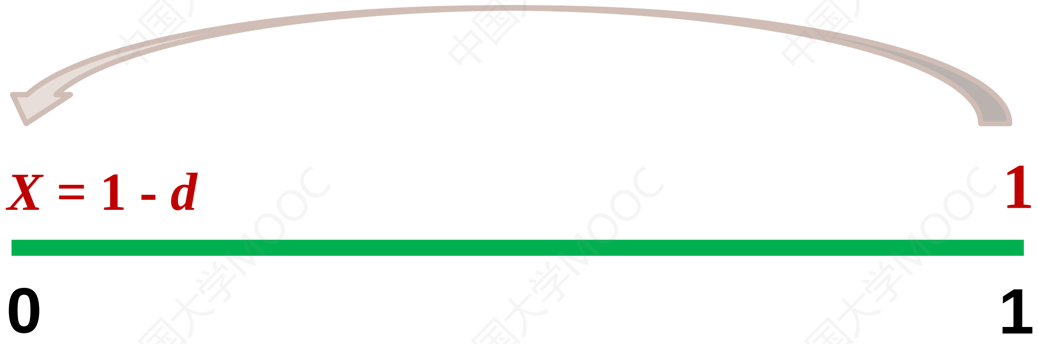
解：假设年末的1元相当于年初的 X，则当年的利息为$1-X$。

根据有效贴现率的定义：

$$d=\frac{1-X}{1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{X=1-d}$$

中国大学MOOC

例：**如果任意一个时期的有效贴现率为 d，则期末的1元在期初的现值为 $1-d$**



在任意时间区间定义有效贴现率

解：假设期末的1元相当于期初的 X，则当期的利息为$1-X$。

由有效贴现率的定义：

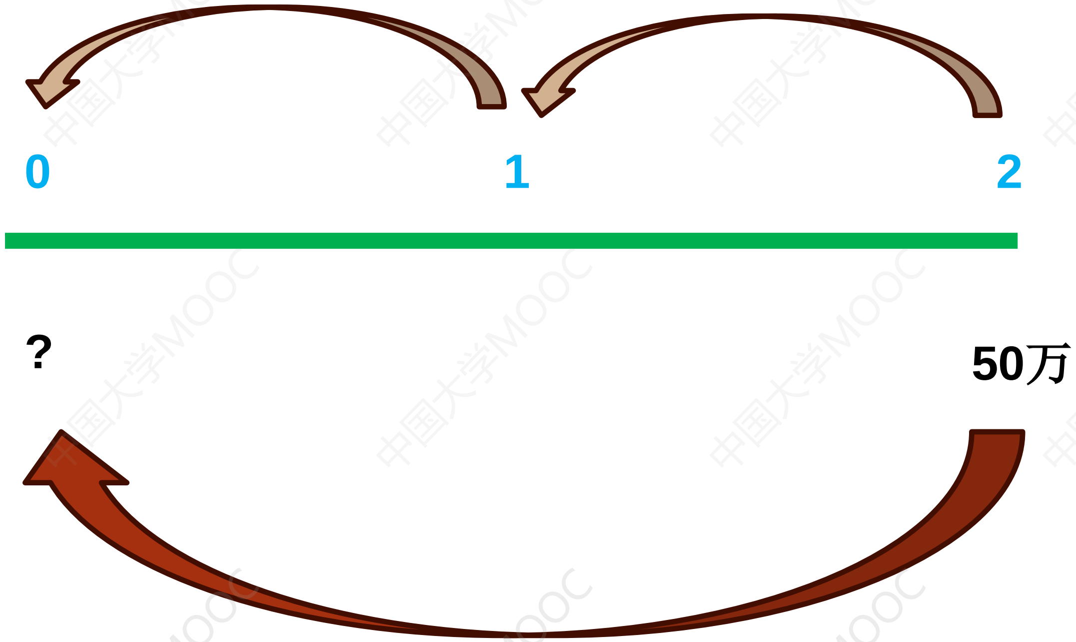
$$d = \frac{1-X}{1} \Rightarrow \boxed{X = 1-d}$$

中国大学MOOC

- **例：** 年有效贴现率为5%，计算$t = 2$时的50万元在$t = 0$时的价值。
- **解：**

$$50 \times (1 - 5\%) \times (1 - 5\%)$$

$$= 45.125$$



中国大学MOOC

有效利率 i 与有效贴现率 d 的关系（1）

$$i=\frac{d}{1-d}$$

年末的1元在年初的现值为：$1-d$

利息：d

根据利率的定义：$i=\dfrac{d}{1-d}$

中国大学MOOC

有效利率 i 与有效贴现率 d 的关系（2）

$$d=\frac{i}{1+i}$$

1　　　　　　　　　　$1+i$

0　　　　　　　　　　1

利息：i

根据贴现率的定义：$$d=\frac{i}{1+i}$$

中国大学MOOC

有效利率 i 与有效贴现率 d 的关系（3）

$$v = 1/(1+i) = 1-d$$

证明：

$$d=\frac{i}{1+i}=1-\frac{1}{1+i}=1-v$$

解释：

0 1

$1-d$ 1

$v = 1/(1+i)$

中国大学MOOC

有效利率 i 与有效贴现率 d 的关系（4）

$$d = iv$$

证明： $d = \dfrac{i}{1+i} = i \cdot \dfrac{1}{1+i} = i \cdot v$

解释：i 和 d 都表示时刻零点投资1元所获得的收益。

注：年末的 i 相当于年初的 d。

中国大学MOOC

有效利率 i 与有效贴现率 d 的关系（5）

$$i - d = id$$

证明：

$$d = \frac{i}{1+i} = i \cdot v = i \cdot (1-d) = i - id$$

中国大学MOOC

解释： $i - d = id$

本金	累积值	利息
1	$1 + i$	i
$1 - d$	1	d
本金差额：d		利息差额：$i - d$

解释： 本金有 d 元差额，导致的利息差额是 id。

中国大学MOOC

有效利率 i 与有效贴现率 d 的关系（6）

$$i = \frac{1}{n} \quad \Leftrightarrow \quad d = \frac{1}{n+1}$$

证明：

$$d = \frac{i}{1+i} = \frac{1/n}{1+1/n} = \frac{1}{n+1}$$

例：

$$i = 5\% = \frac{1}{20}$$

$$d = \frac{1}{21}$$

中国人民大学MOOC

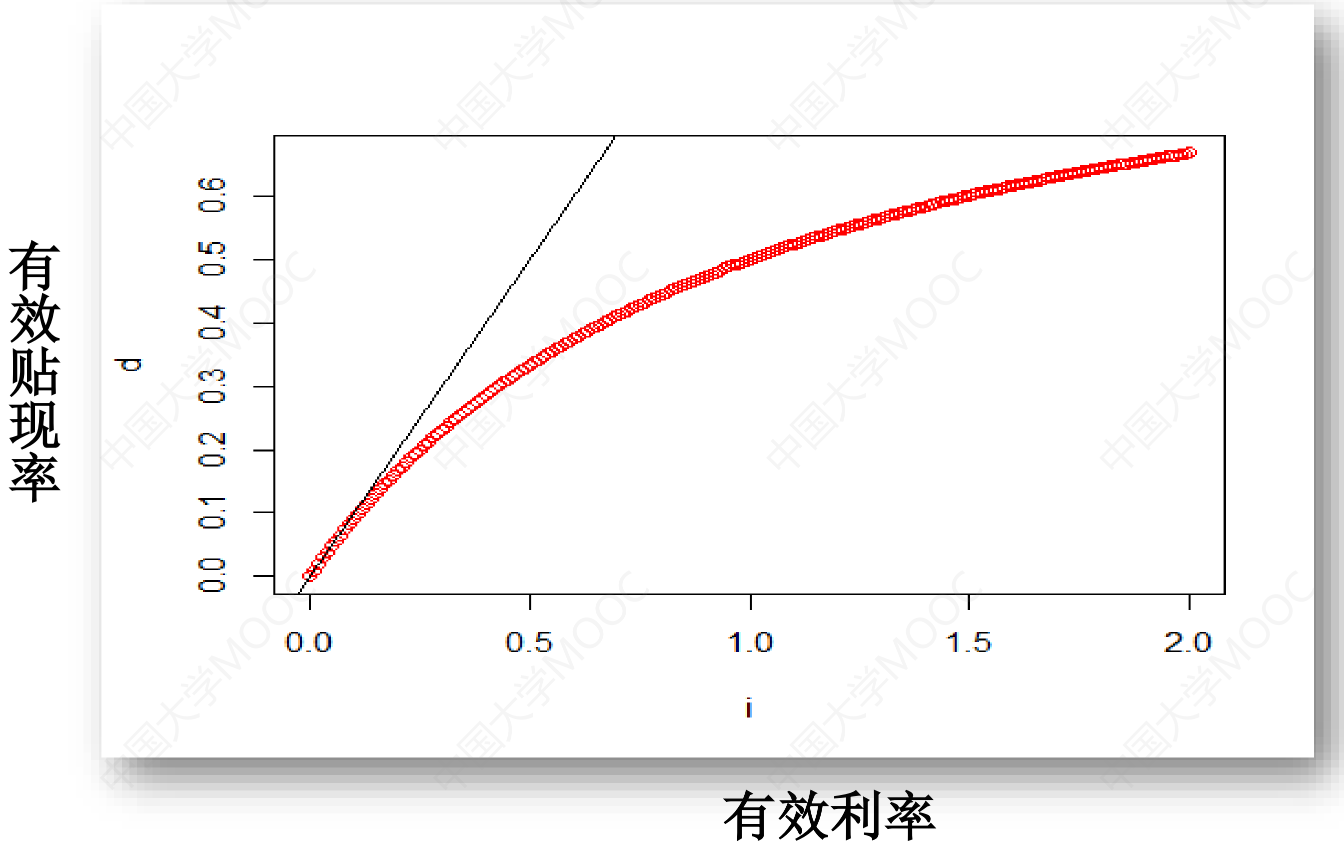
累积函数与贴现函数的不同表示方式

累积函数： $a(t)=(1+i)^{t}=(1-d)^{-t}$

贴现函数： $a^{-1}(t)=(1+i)^{-t}=v^{t}=(1-d)^{t}$

中国大学MOOC

有效利率 i 和有效贴现率d 的极限关系



如果有效利率趋于无穷？ $d = \dfrac{i}{1+i}$

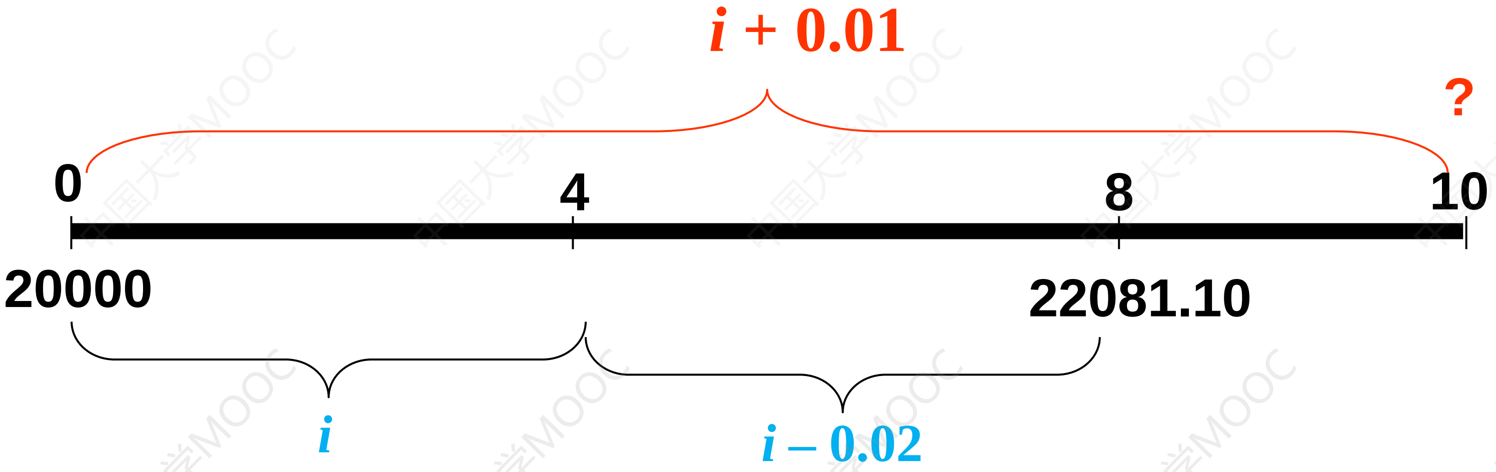
例：投资者将20000 元存入银行，

在最初4年，按年利率 i 计息；

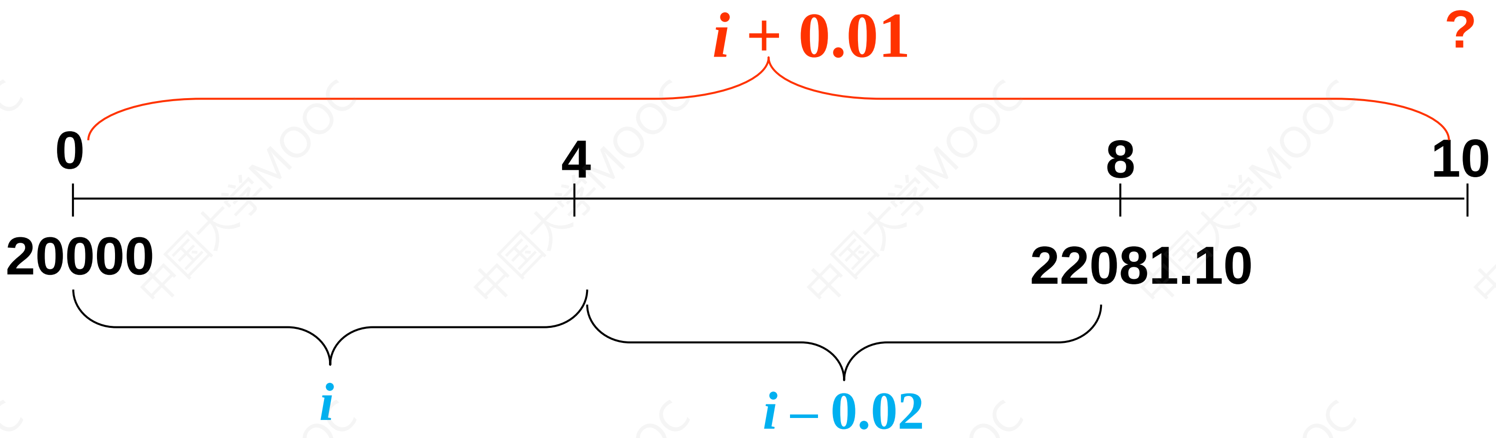
在随后4年，按 $i - 0.02$计息；

在第8年末，余额为22081.10元。

若账户的年利率为 $i + 0.01$ ，则账户在第10年末的余额为多少？ **（按复利计算）**



中国大学MOOC



$$20000(1+i)^4\left(1+(i-0.02)\right)^4=22081.10$$

$$i=2.25\%$$

$$20000\left(1+(2.25\%+0.01)\right)^{10}=27537.89$$

中国大学MOOC

例：面值为100元的一年期债券的价格为95元。 一年期储蓄存款的利率为5.25%。投资者有100万元需要投资，应该选择存款还是购买债券？

解：

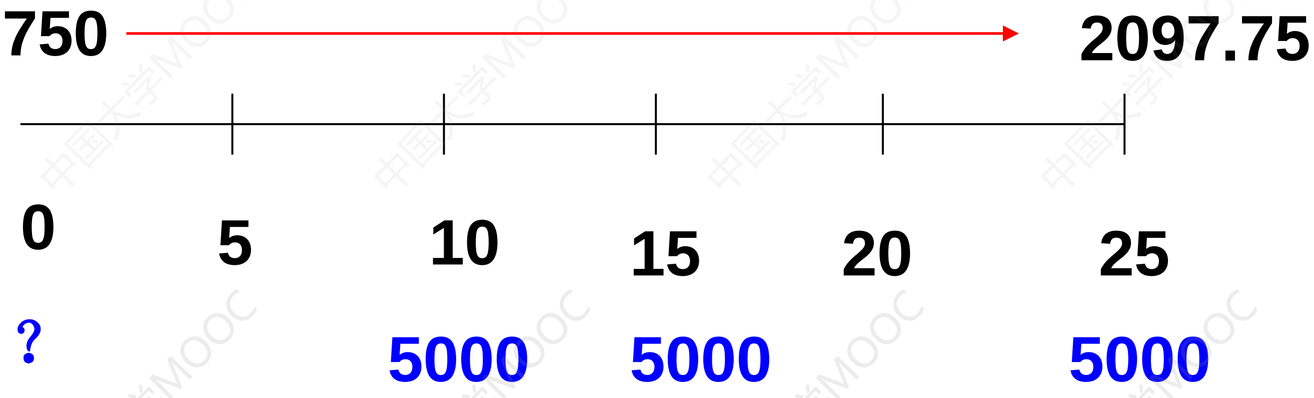
- 比较贴现率：
  - 债券的贴现率 $d = 5\%$
  - 储蓄的贴现率 $d = i/(1+i) = 4.988\%$
- 比较利率：
  - 债券的利率 $d = 5\% = \frac{1}{20} \Rightarrow i = \frac{1}{19} = 5.26\%$
  - 储蓄的利率为 5.25%

练习：当前时刻投资750将在25年末增加到2097.75元。

如果在10年末，15年末和25年末分别投资5000元，计算这些投资的现值之和。

$$750(1+i)^{25}=2097.75 \quad\Rightarrow\quad i=4.2\%$$

$$5000(1+i)^{-10}+5000(1+i)^{-15}+5000(1+i)^{-25}=7798.63$$



中国大学MOOC

练习

已知年有效利率为5%，问：

（1）100万元贷款在年末的利息是多少？

（2）如果在贷款起始日收取利息，应该收取多少利息？

（3）有效贴现率是多少？

（4）写出累积函数和贴现函数。

（5）分别用有效利率和有效贴现率计算，5年末的100万元在时间零点的现值。

中国大学MOOC

年名义利率

- **有效利率：**期末利息与期初本金之比。（任意时间区间）
- **年有效利率：**年末利息与年初本金之比。（一年）
- **年名义利率：**将任意时间区间上的有效利率**年化**表示。（年化利率，年化收益率）
  - **例：**每个季度的有效利率为1.5%，则年名义利率为6%
  - **例：**月有效利率为1%，则年名义利率为12%
  - **例：**3年期的有效利率为15%，则年名义利率为5%

中国大学MOOC

- **例：**考虑下述两笔贷款

（1）贷款100万，年利率为12%，年末支付利息12万。

12%是年有效利率

（2）贷款100万，年利率为12%，每月末支付一次利息，每次支付1万元。

12%是年名义利率

中国大学MOOC

例：理财产品的期限是一个月，到期可获得0.5%的收益率（**月有效利率**）。

表述：理财产品的期限是一个月，年化收益率是6%。

含义：6%是**年名义利率**

年名义利率 = 区间上的有效利率 × 一年包含的区间数

中国大学MOOC

年名义利率的表述方式

季度的有效利率为3%，通常表述为年名义利率：

- 年利率为12%，每年结转4次利息
- 年利率为12%，每年复利4次
- 年利率为12%，每季度结转一次利息
- 年利率为12%，每季度复利一次

中国大学MOOC

年名义利率的符号表示

$i^{(m)}$ 表示年名义利率

m 表示每年包含的区间数，即每年复利的次数

$$i^{(m)} \quad \Leftrightarrow \quad \text{每 } \frac{1}{m} \text{ 年的有效利率} = \frac{i^{(m)}}{m}$$

例：$i^{(4)} = 8\%$ 表示 每年复利4次，每季度的有效利率为2%

例：$i^{(1/5)} = 10\%$ 表示 每5年复利1次，5年期的有效利率为50%

中国大学MOOC

例：银行三个月期限的存款年利率为1.6%，存1000元满3个月可得多少利息？

（**注：银行存款利率是年化利率**）

解：$i^{(4)} = 1.6\%$

三个月的有效利率为　$1.6\% \div 4 = 0.4\%$

存1000元满3个月可得利息：　$1000 \times 0.4\% = 4$元

例：银行5年期定期存款的年利率为6%，存1000元满5年可得多少利息？

（注：银行存款利率是年化利率）

解： $m = 1/5$, $i^{(1/5)} = 6\%$

5 年期的有效利率为: $6\% \div (1/5) = 30\%$

存 1000 元满 5 年可得利息： $1000 \times 30\% = 300$元

年名义利率与任意区间上有效利率的转化关系：

$$\text{年名义利率} i^{(m)} = \frac{1}{m}\text{年区间上的有效利率} \times m$$

$$\frac{1}{m}\text{年区间上的有效利率} = \frac{\text{年名义利率} i^{(m)}}{m}$$

中国大学MOOC

- **例**：理财产品的期限是100天，期初投资20万元到期可以获得21万元。该理财产品的年化收益率是多少？
- **解**：
- 投资区间的有效收益率 = 1/20
- m = 365/100 = 3.65
- 年化收益率 = m × 投资区间的有效收益率 = 3.65/20 = 18.25%

年名义利率 $i^{(m)}$ 与年有效利率 i 的关系：

考虑时间零点的1元在年末的累积值： $1+i=\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

1 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　$1+i$

时间：	0	1/m	2/m	……	m/m = 1
	1	$\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)$	$\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^2$	……	$\left(1+\dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

中国大学MOOC

年名义利率$i^{(m)}$与年有效利率i的关系：

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$(1+i)^{\frac{1}{m}} = 1+\frac{1}{m}i^{(m)}$$

$\frac{1}{m}$年的复利累积

$\frac{1}{m}$年的单利累积

年名义利率：在$1/m$年的时间区间上，与复利利率等价的单利利率

中国大学MOOC

例：投资100万元，年利率为12%。在下述条件下计算1个月末的累积值：

（1）假设上述利率是年有效利率

（2）假设上述利率是年名义利率，每年复利12次

$$(1)\ \ 100\times(1+0.12)^{\frac{1}{12}}=100.95$$

$$(2)\ 100\times\left(1+\frac{0.12}{12}\right)=101$$

中国大学MOOC

例：下述哪个利率对投资者更加有利？

- **年利率为5%，每半年复利一次**
- **年利率为4.95%， 每天复利一次（每年按365天计算）**

$$1+i=\left(1+\frac{0.05}{2}\right)^{2}=1.0506 \quad \Rightarrow \quad i=5.06\%$$

$$1+i=\left(1+\frac{0.0495}{365}\right)^{365}=1.0507 \quad \Rightarrow \quad i=5.07\%$$

中国大学MOOC

例：给定年名义利率为10%，当复利次数增加时，年有效利率如何变化？

复利次数（m）	年有效利率（i）
1	10.00%
2	10.25%
4	10.38%
12	10.47%
52（每周）	10.51%
365(每天)	10.52%

$$1+i=\left(1+\frac{10\%}{m}\right)^m$$

中国大学MOOC

问题：给定年名义利率 δ，若复利次数m为无穷大，年有效利率是多少？

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

$$1+i=\lim_{m\to\infty}\left(1+\frac{\delta}{m}\right)^m=\mathrm{e}^{\delta} \quad \Rightarrow \quad i=\mathrm{e}^{\delta}-1$$

中国人民大学MOOC

例：年名义利率为6%，每8个月复利一次。写出累积函数的表达式，在t = 0时投资200万元，计算在t = 2.5时的累积值。

解： $i^{(m)} = 6\%$, 每年复利m = 12/8 = 1.5 次，所以

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

$$1+i=\left(1+\frac{0.06}{1.5}\right)^{1.5}$$

$$a(t)=(1+i)^{t}=\left(1+\frac{0.06}{1.5}\right)^{1.5t}=1.04^{1.5t}$$

$$200\times a(t)=200\times 1.04^{1.5t}=200\times 1.04^{1.5\times 2.5}=231.69$$

例：投资者A在时间零点存入 X，年利率为i, 每半年复利一次.

投资者B在时间零点存入 $2X$ ，按单利计息，年利率为i.

他们在第8年的后6个月赚取的利息相等. 计算 i.

A： X

B： $2X$

A： $X\left(1+\dfrac{i}{2}\right)^{15}$

B： $2X$

第8年的后6个月赚取的利息相等：

$$X\left(1+\frac{i}{2}\right)^{15}\cdot\frac{i}{2}=2X\cdot\frac{i}{2} \quad\Rightarrow\quad i=9.46\%$$

中国大学MOOC

练习：银行储蓄业务的年利率（都是年名义利率）如下，计算：

（1）年有效利率；

（2）存款100元，满一年时的利息。

存款利率（%）					
3个月	6个月	1年	2年	3年	5年
$m = 4$	$m = 2$	$m = 1$	$m = 1/2$	$m = 1/3$	$m = 1/5$
1.80	2.25	2.52	3.06	3.69	4.14

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

中国大学MOOC

参考答案：

存款利率：年名义利率和年有效利率的比较						
	存款利率					
	3个月	6个月	1年	2年	3年	5年
年名义利率	1.80	2.25	2.52	3.06	3.69	4.14
年有效利率	1.812	2.263	2.52	3.015	3.562	3.834

- 小于1年时，年有效利率大于年名义利率
- 超过1年时，年有效利率小于年名义利率

中国大学MOOC

年名义贴现率

有效贴现率：期末的利息与期末累积值之比（任意时间区间）

年有效贴现率：年末的利息与年末累积值之比（一年）

年名义贴现率：将任意区间上的有效贴现率**年化**表示

年名义贴现率 = 任意区间上的有效贴现率 × 一年包含的区间数

例：

- 月有效贴现率为1% = 年名义贴现率为12%，每年贴现12次
- 2年期的有效贴现率为8% = 年名义贴现率为4%，每2年贴现1次

中国大学MOOC

名义贴现率的符号表示

$d^{(m)}$ ：每 1/m 年的有效贴现率为 $\dfrac{d^{(m)}}{m}$

年名义贴现率 = 区间的有效贴现率 × 一年包含的区间数

$d^{(m)}$ $\qquad\qquad$ $\dfrac{d^{(m)}}{m}$ $\qquad\qquad$ m

中国大学MOOC

年名义贴现率与年有效贴现率的关系

每 $\frac{1}{m}$ 年的有效贴现率为 $\frac{d^{(m)}}{m}$

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

$1 - d$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　1

时间：	0	1/m	……	1-2/m	1-1/m	m/m = 1
	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}$		……	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{2}$	$\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)$	1

中国大学MOOC

- **名义贴现率与有效贴现率的关系：**

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}$$

$$\left(1-d\right)^{\frac{1}{m}}=1-\frac{1}{m}d^{(m)}$$

年名义贴现率：在 1/*m* 年的时间区间内，与年有效贴现率*d* 等价的单贴现率。

中国大学MOOC

- **例：年名义贴现率为6%，每半年贴现1次。第6年末到期的1000，在时间零点的现值是多少？**

0 6

? 1000

- **解：**

$$d^{(2)}=6\%$$

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}=\left(1-\frac{6\%}{2}\right)^{2}$$

$$1000(1-d)^{6}=1000\left[1-\frac{6\%}{2}\right]^{2\times 6}=1000\times(1-3\%)^{12}=693.84$$

例：给定年名义贴现率10%，当贴现次数的增加时，年有效贴现率如何变化？

贴现次数（m）	年有效贴现率（d）
1(每年)	10.00%
2(每半年)	9.75%
4(每季)	9.63%
12(每月)	9.55%
52(每周)	9.53%
365(每天)	9.52%
∞	9.52%

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

中国大学MOOC

名义利率与名义贴现率的关系(1)

$$\frac{d^{(m)}}{m}=\frac{\frac{i^{(m)}}{m}}{1+\frac{i^{(m)}}{m}}$$

$$\frac{i^{(m)}}{m}=\frac{\frac{d^{(m)}}{m}}{1-\frac{d^{(m)}}{m}}$$

$0 \qquad\qquad \frac{1}{m}$

$1 \dashrightarrow \boxed{1+\frac{i^{(m)}}{m}}$

$\boxed{1-\frac{d^{(m)}}{m}} \dashleftarrow 1$

中国大学MOOC

名义利率与名义贴现率的关系(2)

$$i - d = i \times d$$

$$\frac{i^{(m)}}{m} - \frac{d^{(m)}}{m} = \frac{i^{(m)}}{m} \times \frac{d^{(m)}}{m}$$

有效利率 – 有效贴现率 = 有效利率 × 有效贴现率

中国大学MOOC

用名义利率和名义贴现率表示的累积函数和贴现函数

$$a(t)=(1+i)^t=\left[1+\frac{i^{(m)}}{m}\right]^{mt}$$

$$1+i=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^m$$

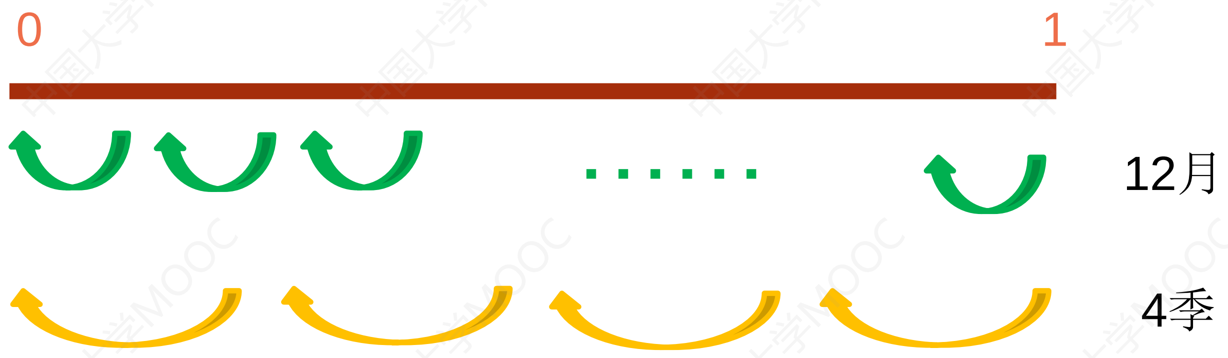
$$a^{-1}(t)=(1-d)^t=\left[1-\frac{d^{(m)}}{m}\right]^{mt}$$

$$1-d=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^m$$

中国人民大学MOOC

例：假设每月贴现一次的年贴现率为6%，计算与其等价的每季度复利一次的年利率是多少？（等价的含义：使用两种利息度量工具计算现值（或累积值），结果相等）

$$d^{(12)}=6\% \qquad\qquad i^{(4)}=?$$

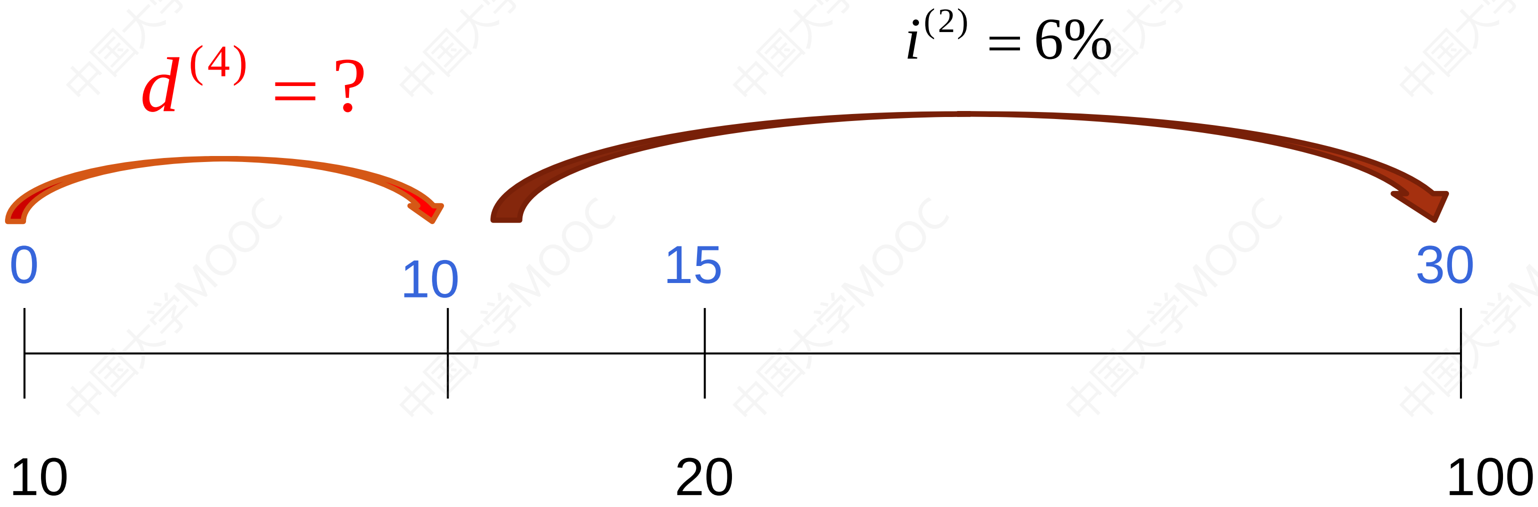


现值：$$\left[1+\frac{i^{(4)}}{4}\right]^{-4}=\left[1-\frac{6\%}{12}\right]^{12}$$

$$i^{(4)}=6.06\%$$

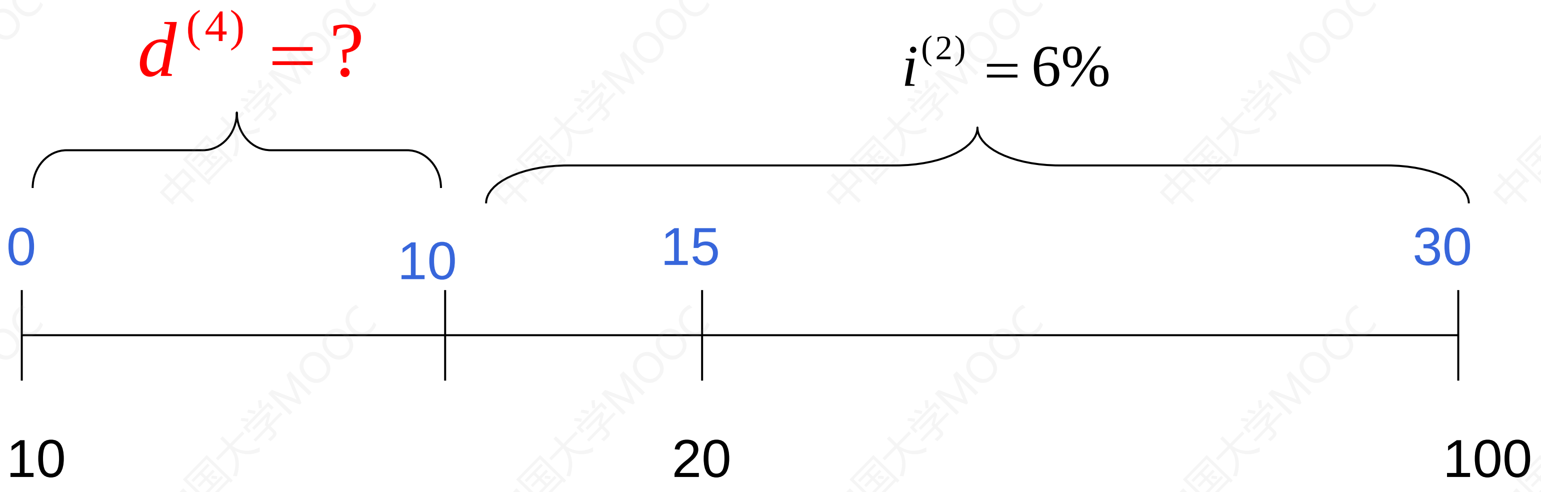
中国大学MOOC

- **例**： **投资者在基金中存入 10 万元，15年后再存入20 万元。在前10年，基金按每年贴现4次的年贴现率$d^{(4)}$ 计息，之后按每年复利2次的年利率6%计息。30年后，基金的累积值为100万元。计算$d^{(4)}$.**



中国大学MOOC

解：



$$10\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-40}\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{40}$$

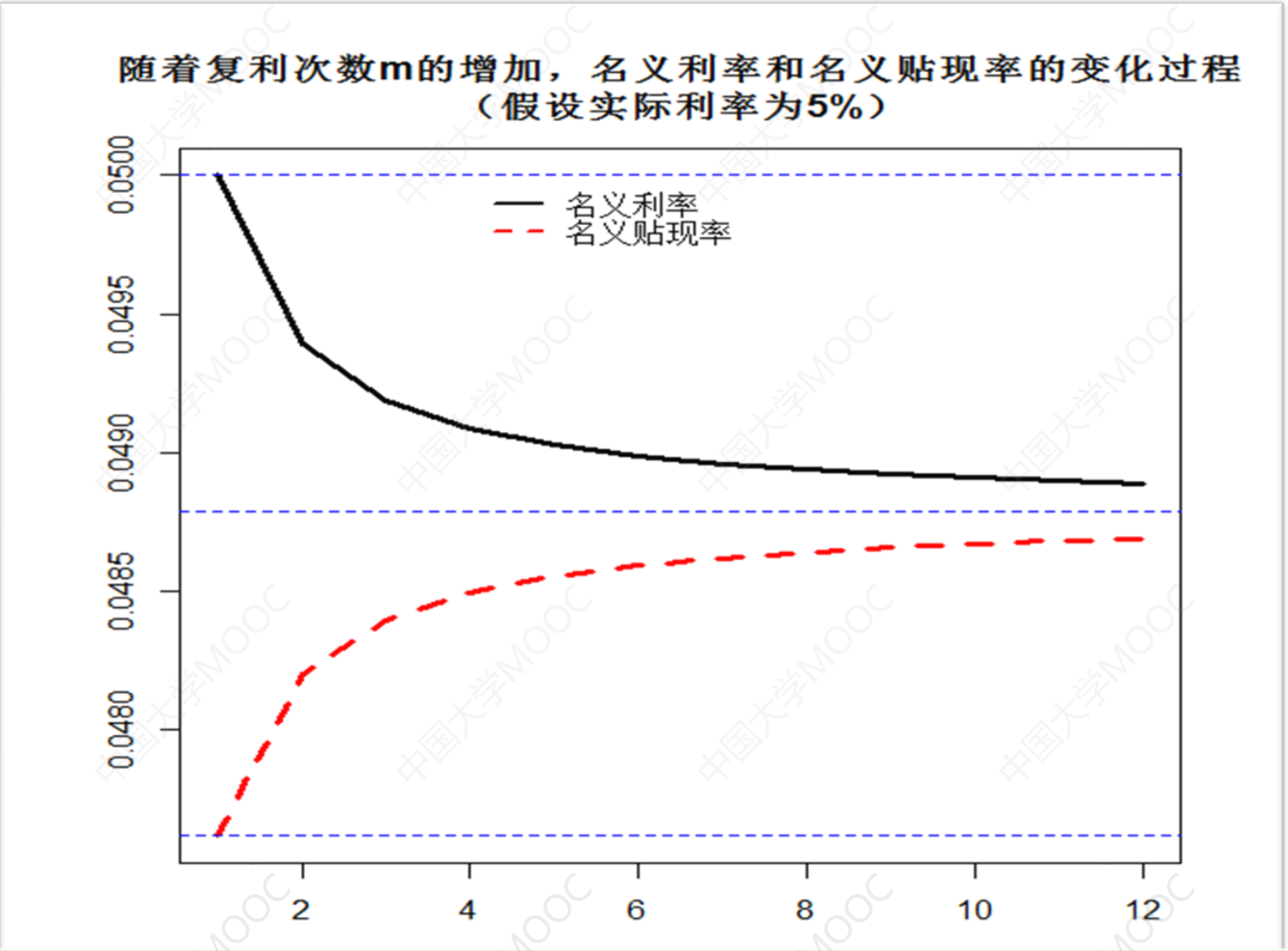
$$20\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{30}$$

$$10\left(1-\frac{d^{(4)}}{4}\right)^{-40}\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{40}+20\left(1+\frac{0.06}{2}\right)^{30}=100$$

$$\Rightarrow d^{(4)}=0.0453$$

中国大学MOOC

等价利息度量之间的数值大小关系



$$d \le d^{(2)} \le d^{(3)} \le \cdots \le \cdots \delta \cdots \le \cdots \le i^{(3)} \le i^{(2)} \le i$$

利息力（瞬时利率）

- **年有效利率：度量资金在一个年度的增长率**
- **年名义利率：度量资金在任意区间上的增长率**
  - 年名义利率 = 区间上的有效利率 × 一年包含的区间数
  - 例：如果月有效利率为0.5%，则年名义利率为6%
- **利息力： 度量资金在无穷小区间（时点）上的瞬时增长率，年化表示**

中国大学MOOC

考虑时间区间[t, $t+h$]，一年包含 $\frac{1}{h}$ 个区间

时间区间[t, $t+h$]的有效利率：

$$\frac{a(t+h)-a(t)}{a(t)}$$

年化表示，即年名义利率为：

$$\frac{a(t+h)-a(t)}{h\cdot a(t)}$$

中国大学MOOC

当时间区间无穷小时（h → 0），该区间的年名义利率为：

$$\lim_{h\to 0}\frac{a(t+h)-a(t)}{h\cdot a(t)} = \frac{1}{a(t)}\lim_{h\to 0}\frac{a(t+h)-a(t)}{h} = \frac{a'(t)}{a(t)}$$

定义：时刻 *t* 的利息力（瞬时利率）为

$$\delta(t)=\frac{a'(t)}{a(t)}$$

解释：在无穷小的时间区间上，单位资金在单位时间（一年）的增长率

中国大学MOOC

例：单利的利息力递减

单利的累积函数

$$a(t) = 1 + it$$

单利的利息力为

$$\delta(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} = \frac{i}{1+it}$$

中国大学MOOC

例：复利的利息力是常数

$$a(t)=(1+i)^t \qquad a'(t)=(1+i)^t\ln(1+i)$$

$$\delta(t)=\frac{a'(t)}{a(t)}=\ln(1+i)$$

- **复利的利息力:** $\delta=\ln(1+i) \Leftrightarrow 1+i=e^{\delta}$
- **复利的累积函数：** $a(t)=(1+i)^t=e^{\delta t}$

中国大学MOOC

例：复利条件下，利息力是 $m\to\infty$ 的年名义利率

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \lim_{m\to\infty} m\left[(1+i)^{\frac{1}{m}} - 1\right]$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{(1+i)^x - 1}{x} \qquad （令 x = 1/m）$$

$$= \lim_{x\to 0}\left[(1+i)^x \ln(1+i)\right]$$

$$= \ln(1+i)$$

$$\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta$$

中国大学MOOC

问题：复利条件下，当 $m\to\infty$ 时，年名义贴现率 $d^{(m)}$等于利息力？

$$d^{(m)}=m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]$$

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)}=\delta$$

$$\lim_{m\to\infty} d^{(m)}=\lim_{m\to\infty} m\left[1-(1-d)^{\frac{1}{m}}\right]\xrightarrow{\text{令}x=1/m}\lim_{x\to 0}\frac{1-(1-d)^{x}}{x}$$

$$=-\ln(1-d)=-\ln e^{-\delta}=\delta$$

- **复利条件下，利息力的等价概念：**
  - 连续收益率
  - 对数收益率
- 例：对数收益率具有可加性
  - 资产价格：100，110，121
  - 每天的对数收益率：
    - j1 = ln(110/100)，j2 = ln(121/110)
  - 连续两天的对数收益率：
    - j12 = j1 + j2 = ln(121/100)

中国大学MOOC

贴现力

- **在 t 时的贴现力为** $\delta^*(t) = -\dfrac{\left[a^{-1}(t)\right]'}{a^{-1}(t)}$

$$\delta^*(t) = -\frac{\left[a^{-1}(t)\right]'}{a^{-1}(t)} = \frac{a^{-2}(t)}{a^{-1}(t)} \cdot a'(t) = \frac{a'(t)}{a(t)} = \delta(t)$$

- **利息力 = 贴现力**

中国大学MOOC

用利息力表示的累积函数

$$\delta(s)=\frac{a'(s)}{a(s)}=[\ln a(s)]'$$

$$a(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t \delta(s)\,\mathrm{d}s}$$

两边积分：

$$\text{左边}=\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s$$

$$\text{右边}=\int_0^t [\ln a(s)]'\mathrm{d}s=[\ln a(s)]_0^t=\ln a(t)-\ln a(0)=\ln a(t)$$

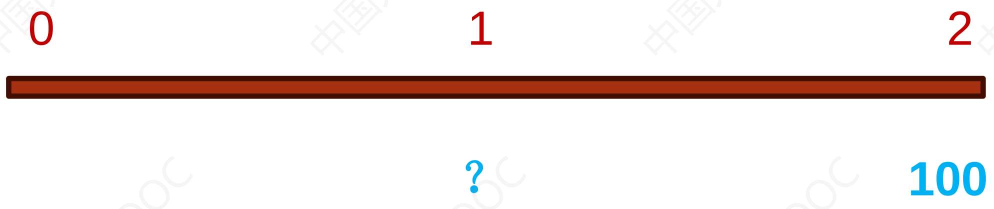
故

$$\ln a(t)=\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s$$

中国大学MOOC

例：已知利息力δ(t) = 0.01t，计算 t=2 时的100 在 t=1 时的价值

$$V = 100\frac{a(1)}{a(2)}$$



$$a(t) = e^{\int_0^t \delta(s)\,\mathrm{d}s}$$

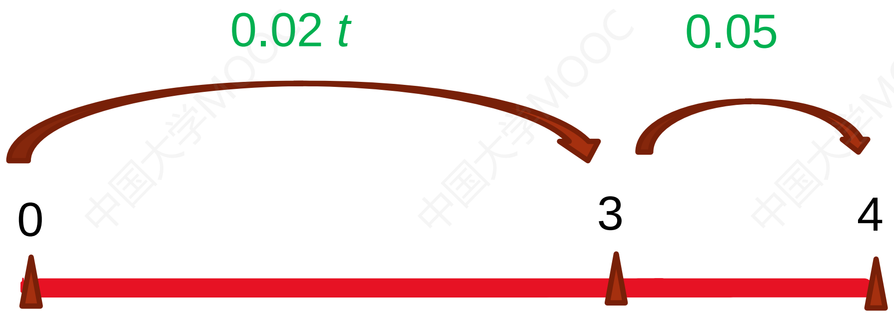
$$\frac{a(1)}{a(2)} = e^{\int_0^1 0.01s\,\mathrm{d}s - \int_0^2 0.01s\,\mathrm{d}s} = e^{-\int_1^2 0.01s\,\mathrm{d}s} = 0.9851$$

中国大学MOOC

例：假设利息力如下：

$$\delta(t)=\begin{cases}0.02t & \text{if } 0\le t\le 3\\ 0.05 & \text{if } \quad t>3\end{cases}$$

计算前4年（即0 ~ 4年期间）的年有效利率。



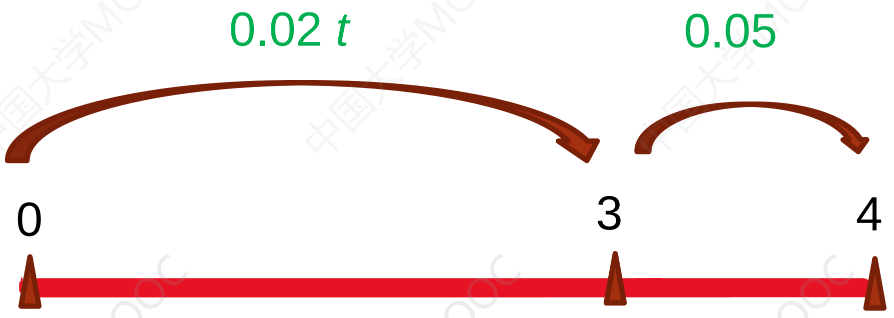
参考答案:

$$a(4)=\mathrm{e}^{\int_0^4 \delta(t)\mathrm{d}t}, \qquad \int_0^4 \delta(t)\mathrm{d}t=\int_0^3 0.02t\mathrm{d}t+\int_3^4 0.05\mathrm{d}t=0.14$$

$$\Rightarrow a(4)=\mathrm{e}^{0.14}$$

$$\mathrm{e}^{0.14}=(1+i)^4$$

$$\Rightarrow i=3.56\%$$



中国大学MOOC

例：账户A按照每年复利两次的年名义利率10% 计息。账户B按照单利 i 计息。在第5年末, 即 t = 5 时， 两个账户的利息力相等。计算 i。

$$\delta(t)=\frac{a'(t)}{a(t)}=\left(\ln a(t)\right)'$$

思路：通过累积函数$a(t)$ 求解利息力$\delta(t)$。

参考答案：

对于账户A： $a(t)=\left(1+\frac{0.1}{2}\right)^{2t}=(1.05)^{2t}$

$$\delta(t)=\left(\ln a(t)\right)'=\left(2t\cdot\ln(1.05)\right)'=2\ln(1.05)$$

对于账户B： $a(t)=1+it$ $\qquad \delta(t)=\frac{i}{1+it}$

$$\frac{i}{1+5i}=2\ln(1.05)\Rightarrow i=0.1905$$

中国人民大学MOOC

利率概念辨析

- 实际利率与名义利率（考虑任意一个时期）：
  - 在经济学中，实际利率扣除了通胀率；名义利率包含通胀率。
  - 用 i 表示名义利率， r 表示实际利率， π 表示通胀率，则

    $$1 + i = (1 + r)(1 + \pi)$$

  - 近似： $i \approx r + \pi$

中国大学MOOC

1元

名义利率 = 32%

1.32元

$$1 + i = (1 + r)(1 + \pi)$$

1元/个

通胀率 = 20%

1.2元/个

1 + 32% = (1 + 10%)(1 + 20%)

1个

实际利率 = 10%

1.1个

- **利率和贴现率：在计算现值时，利率有时被误称为贴现率。**
- **计算现值可以用利率、贴现率、利息力：**

$$a^{-1}(t)=(1+i)^{-t}=(1-d)^{t}=\mathrm{e}^{-\delta t}=\mathrm{e}^{-\int_0^t \delta(s)\,\mathrm{d}s}$$

中国大学MOOC

中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA
统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

利息度量

小结

孟生旺

中国大学MOOC

利息度量

- 累积函数、贴现函数
- 有效利率、有效贴现率
- 年名义利率、年名义贴现率
- 利息力（瞬时利率）

中国大学MOOC

累积函数：时间零点的1元在时间 t 的价值，记为 $a(t)$

复利：$a(t)=(1+i)^{t}$

单利：$a(t)=1+it$

贴现函数：时间 t 的1元在时间零点的价值，记为 $a^{-1}(t)$

中国大学MOOC

在任意时间区间上可以定义有效利率和有效贴现率：

$$d=\frac{i}{1+i}$$

$$i=\frac{d}{1-d}$$

注：通常情况下，i 和 d 分别表示1个年度的有效利率和有效贴现率。

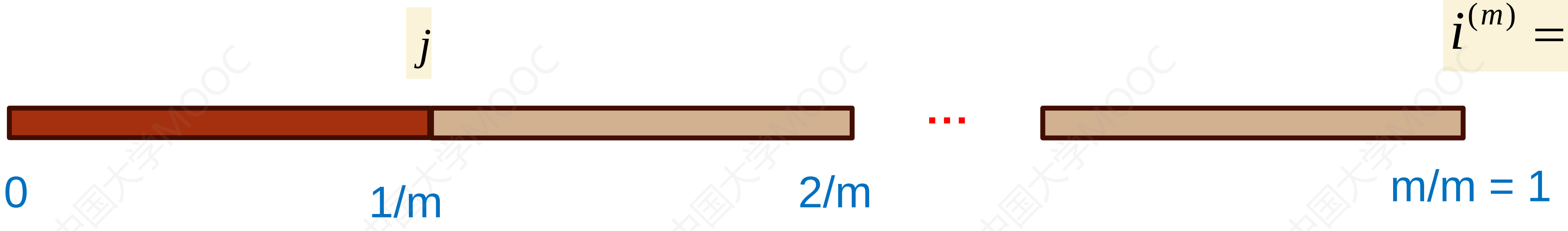
复利条件下的累积函数和贴现函数：

累积函数： $a(t)=(1+i)^{t}=(1-d)^{-t}$

贴现函数： $a^{-1}(t)=(1+i)^{-t}=(1-d)^{t}$

中国大学MOOC

将任意时间区间上定义有效利率年化表示，就是年名义利率：



$$i^{(m)} = m \times j$$

注：如果年名义利率为 $i^{(m)}$，则 $[0, 1/m]$ 区间上的有效利率为 $j = \dfrac{i^{(m)}}{m}$

年初的1元在年末的价值：$(1+i) = \left(1 + \dfrac{i^{(m)}}{m}\right)^m$

中国大学MOOC

将任意时间区间上定义有效贴现率年化表示，就是年名义贴现率：

$d^{(m)} = m \times k$

k

注：如果年名义贴现率为 $d^{(m)}$，则 [0, 1/m] 区间上的有效贴现率为 $k = \dfrac{d^{(m)}}{m}$

年末的1元在年初的价值：$(1-d) = \left(1 - \dfrac{d^{(m)}}{m}\right)^{m}$

中国大学MOOC

在无穷小区间上定义有效利率，并将其年化表示，就是利息力（瞬时利率）：

区间$[t,\ t+h]$上定义有效利率：$\dfrac{a(t+h)-a(t)}{a(t)}$

年化表示为年名义利率：$\dfrac{a(t+h)-a(t)}{a(t)}\times\dfrac{1}{h}$

利息力：无穷小区间上的年名义利率 $\delta(t)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{a(t+h)-a(t)}{a(t)}\times\dfrac{1}{h}=\dfrac{a'(t)}{a(t)}$

用利息力表示累积函数：$a(t)=\mathrm{e}^{\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s}$

中国大学MOOC

复利的利息力： $\delta=\ln(1+i)$

复利的累积函数： $a(t)=\mathrm{e}^{\delta t}$

中国大学MOOC

累积函数：

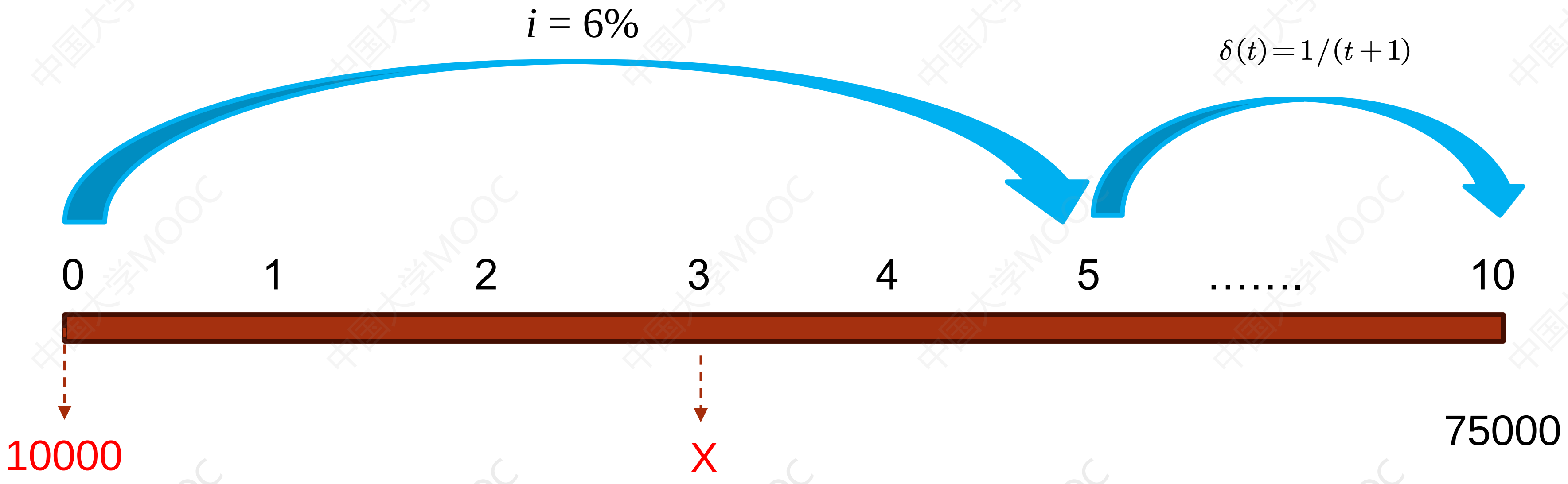
$$a(t)=(1+i)^{t}=\left(1+\frac{i^{(m)}}{m}\right)^{mt}=\mathrm{e}^{\delta t}=\mathrm{e}^{\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s}$$

贴现函数：

$$a^{-1}(t)=(1-d)^{t}=\left(1-\frac{d^{(m)}}{m}\right)^{mt}=\mathrm{e}^{-\delta t}=\mathrm{e}^{-\int_0^t \delta(s)\mathrm{d}s}$$

中国大学MOOC

- **练习：银行在当前时刻借出10000元，3年后再借出X，在10年末收回75000元。银行在前5年按照年有效利率6%收取利息，以后按照利息力$1/(t+1)$收取利息。计算X。**



参考答案：

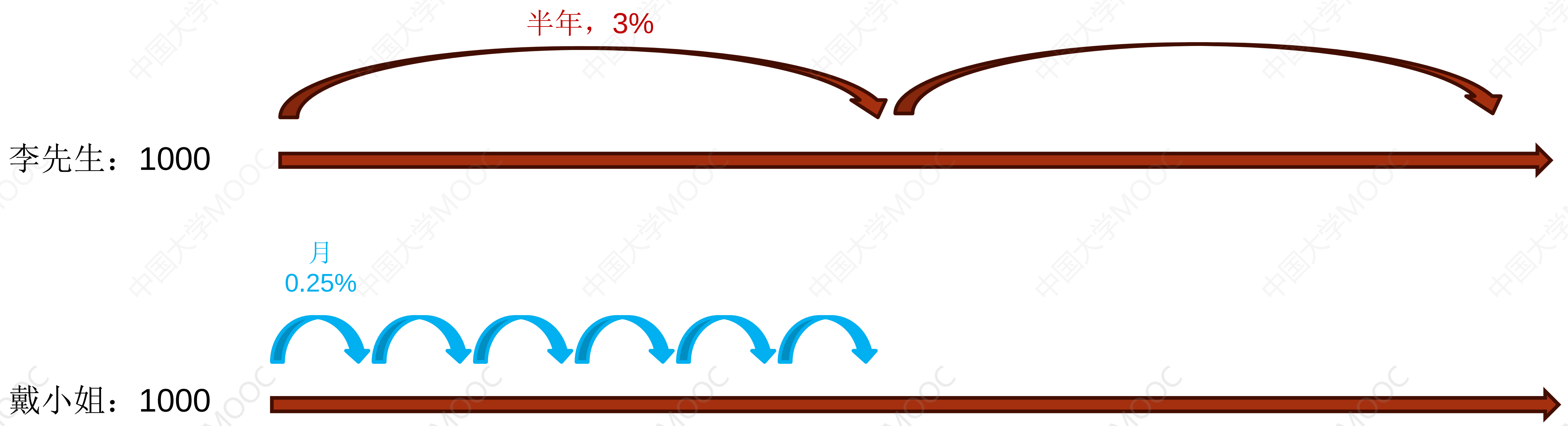
$$[10,000(1.06)^5+X(1.06)^2]e^{\int_5^{10}\frac{1}{t+1}dt}=75,000$$

$$(13,382.26+1.1236X)\frac{11}{6}=75,000$$

$$1.1236X=27,526.83$$

$$X=24,498.78$$

- **练习**：李先生在银行账户中存入1000，按每年复利2次的年名义利率6%计息。戴小姐同时在银行账户中存入1000，按每月复利一次的年名义利率3%计息。每个账户只能在各自的利息结转周期末支付当期的利息。计算经过多少个月以后，李先生的账户价值将至少是戴小姐账户价值的2倍。



中国大学MOOC

参考答案：

假设需要 n 年，则

$$1000(1.03)^{2n}=2(1000)(1.0025)^{12n}$$

$$2n\ln 1.03+\ln 1000=12n\ln 1.0025+\ln 2000$$

$$0.029155n=0.69315$$

$$n=23.775$$

即285.3 个月。

因为李先生的账户每6个月支付一次利息，故下次利息支付时间应该是288个月末。

中国大学MOOC