



中國人民大學
RENMIN UNIVERSITY OF CHINA

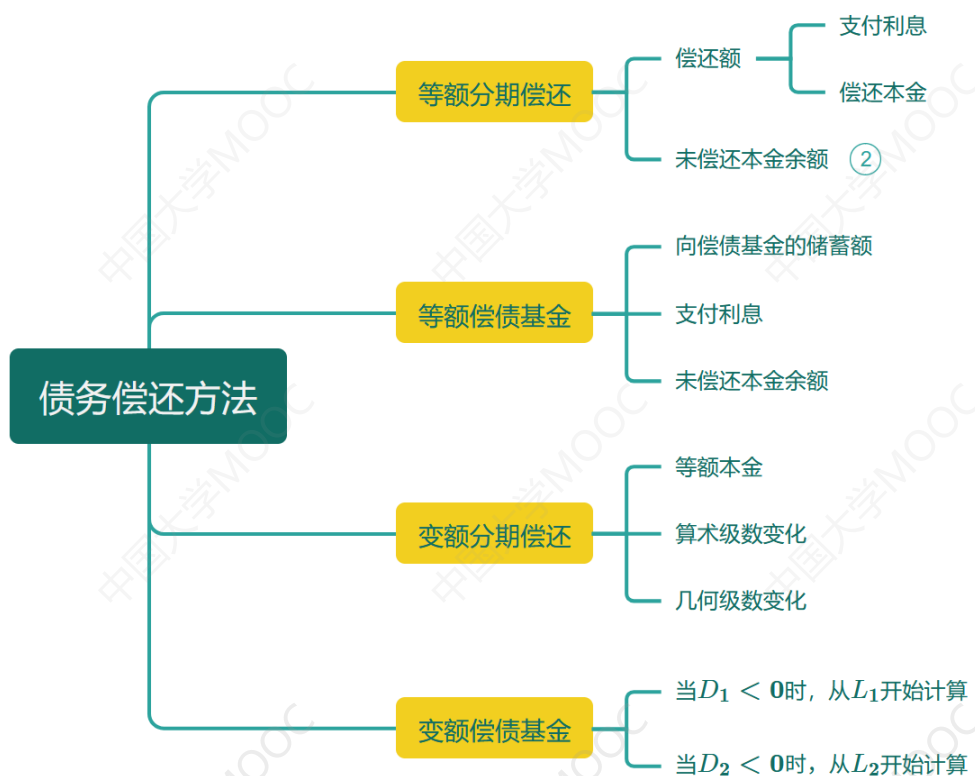
統計學院
SCHOOL OF STATISTICS

債務償還

孟生旺



主要内容



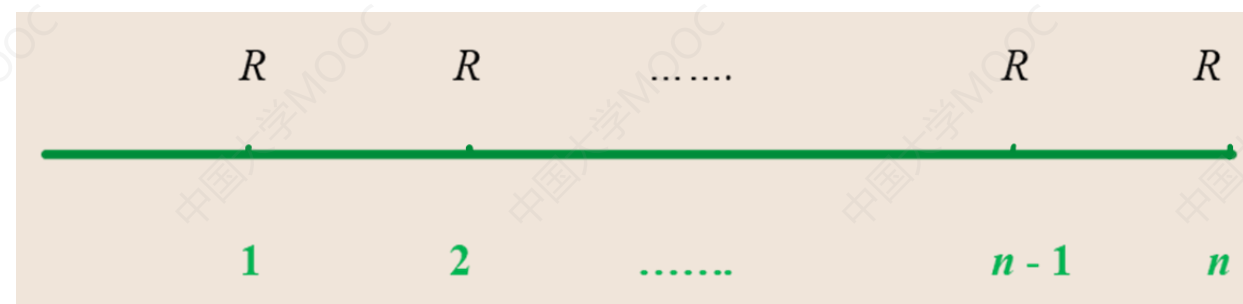
等额分期偿还

- 在等额分期偿还中，需要解决：
 - 每次偿还的金额是多少？
 - 未偿还的本金余额是多少？
 - 在每次偿还的金额中，利息和本金分别是多少？

每次偿还的金额

- 贷款的本金 L_0
- 期限 n
- 年利率 i
- 每年末等额偿还 R

$$Ra_{\overline{n}|} = L_0 \quad \Rightarrow \quad R = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|}}$$

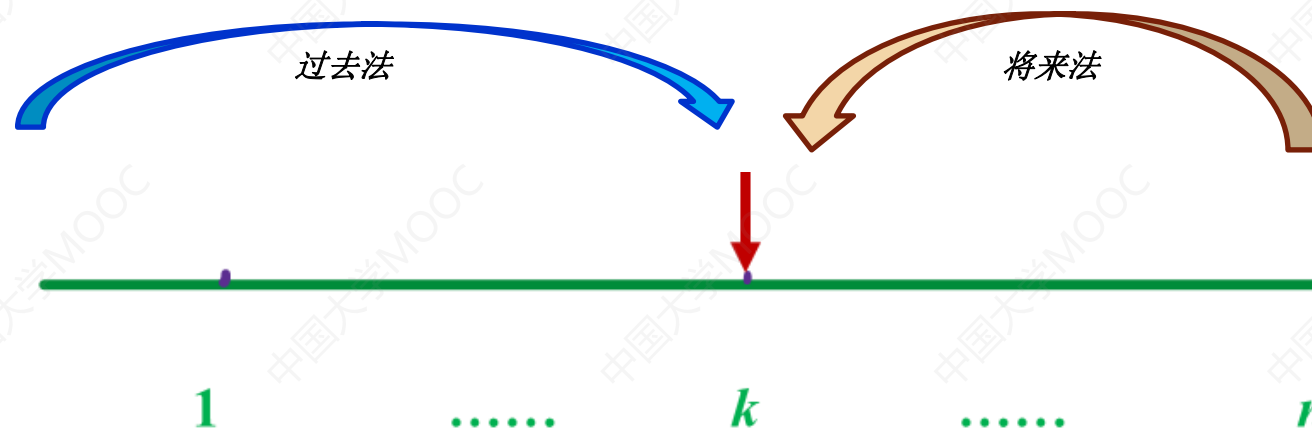


未偿还本金余额

问题： 每年偿还 R ，第 k 年末的未偿还本金余额？

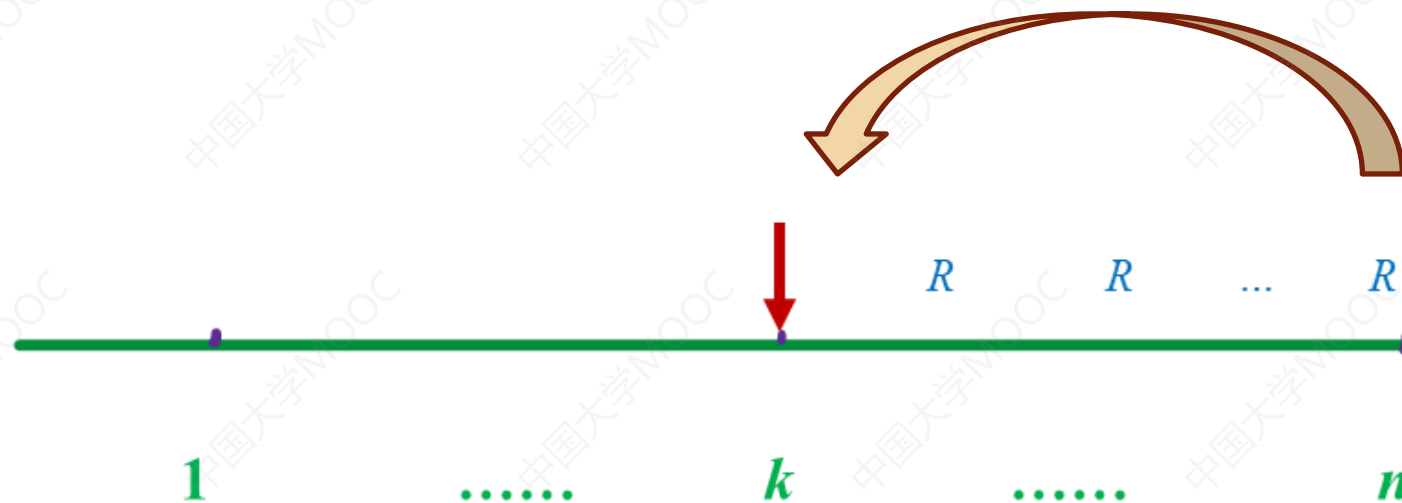
方法：

- 将来法
- 过去法



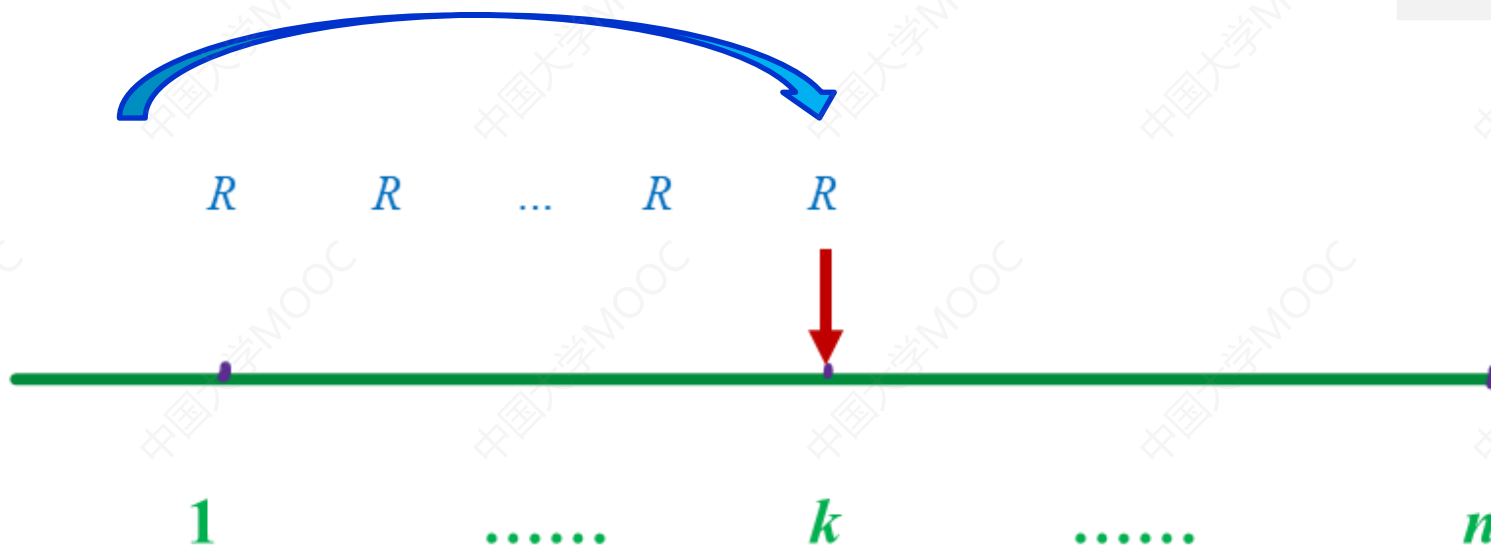
将来法：将来还需要偿还 $n - k$ 次。

$$L_k = Ra_{\overline{n-k}|}$$



过去法：从本金的累积值中减去已偿还金额的累积值。

$$L_k = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k}|i}$$



证明：将来法 = 过去法

$$L_k = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k}|i} \quad (\text{过去法})$$

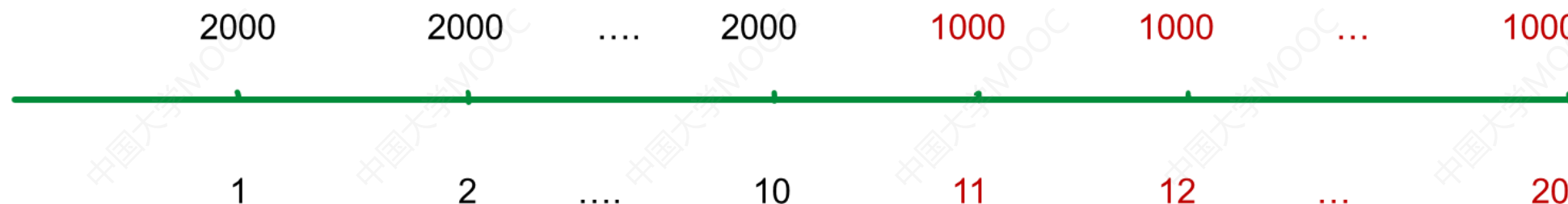
$$L_0 = Ra_{\overline{n}|i}$$

$$= Ra_{\overline{n}|i}(1+i)^k - Rs_{\overline{k}|i} = R \left[(1+i)^k \cdot \frac{1-v^n}{i} - \frac{(1+i)^k - 1}{i} \right]$$

$$= R \left[\frac{(1+i)^k - v^{n-k}}{i} - \frac{(1+i)^k - 1}{i} \right] = R \cdot \frac{1-v^{n-k}}{i}$$

$$= Ra_{\overline{n-k}|i} \quad (\text{将来法})$$

例：一笔贷款每年末偿还一次，前10年每年末偿还2000，后10年每年末偿还1000。如果年利率为5%，用过去法计算第5次偿还后的本金余额。



$$L_0 = 1000(a_{\overline{20}|} + a_{\overline{10}|}) = 20184$$

$$L_5 = 20184(1.05)^5 - 2000s_{\overline{5}|} = 14709$$

例：一笔贷款的年利率为9%，期限为20年，每年末偿还1000。在第5年末，借款人希望多偿还2000，然后将剩余本金在未来12年内等额偿还。计算后12年每年末等额偿还的金额。



解：第5次偿还后，未偿还本金余额为 $L_5 = 1000a_{\overline{15}|} = 8060.70$

如借款人额外偿还2000，则本金余额变为6060.70。

未来12年等额偿还，所以 $Xa_{\overline{12}|} = 6060.70$

$$X = \frac{6060.70}{7.1607} = 846.38$$

本息分解

第 k 年初**本金余额**

$$L_{k-1} = Ra_{\overline{n-k+1}|}$$

$k-1$

k

$$R = I_k + P_k$$

第 k 年末**支付利息**

$$I_k = iL_{k-1} = iRa_{\overline{n-k+1}|i} = R(1 - v^{n-k+1})$$

第 k 年末**偿还本金**

$$P_k = R - I_k = R \cdot v^{n-k+1}$$

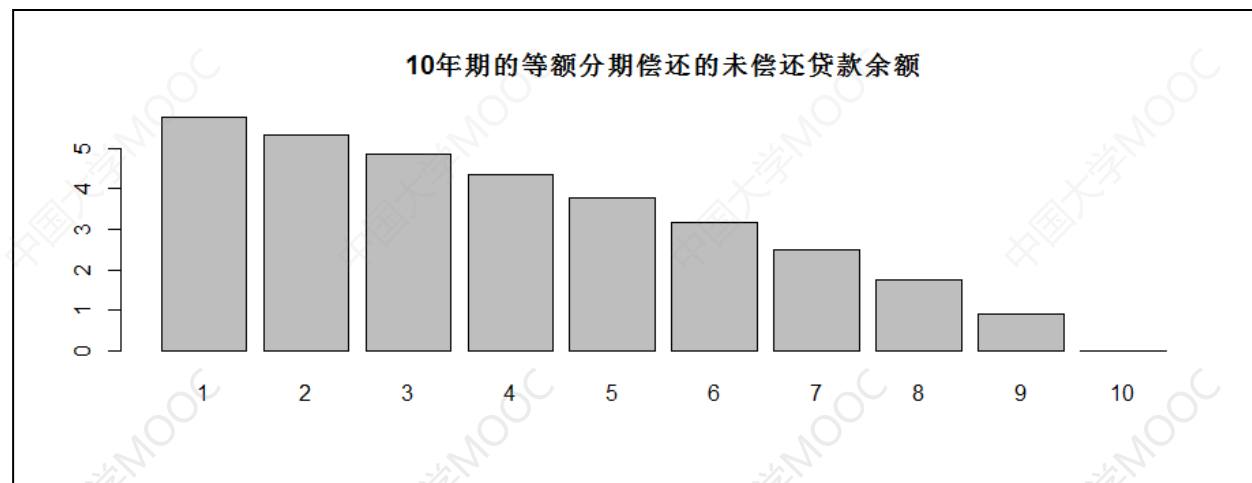
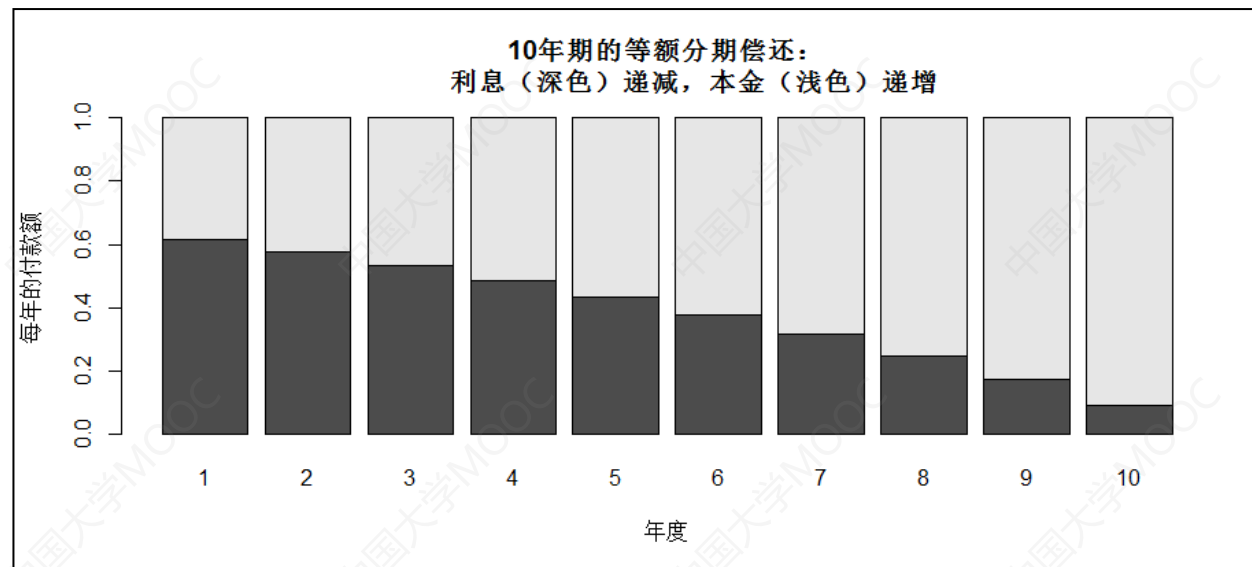
等额分期偿还表

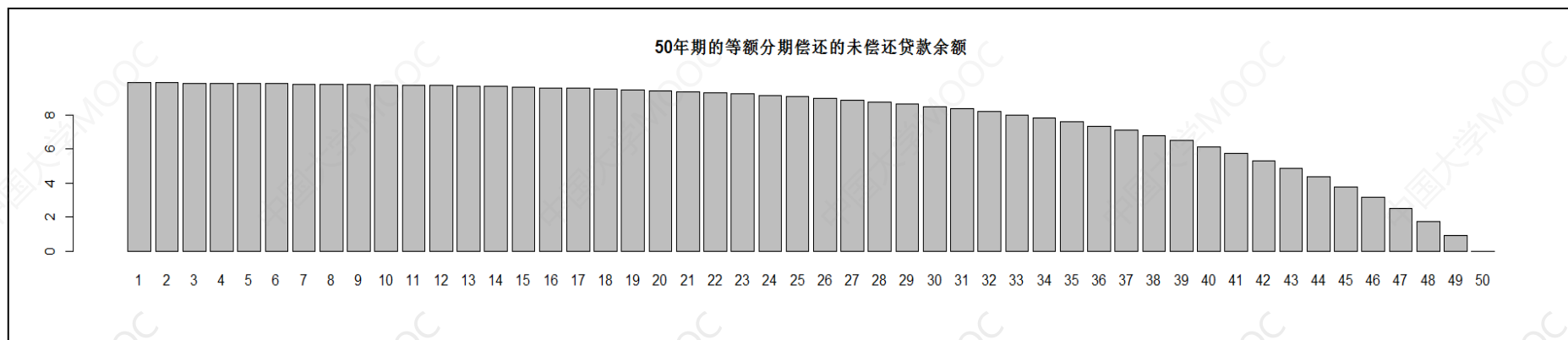
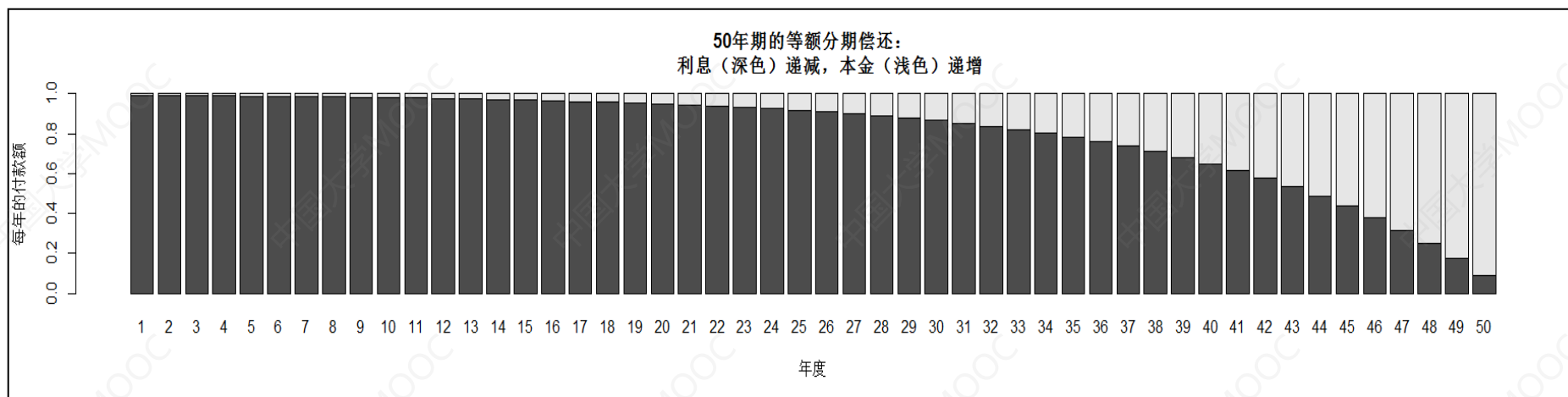
- 构成要素：
 - 每年末的还款额
 - 每年末的本金余额
 - 本息分解：
 - 偿还本金
 - 支付利息

等额分期偿还表

令 $R = 1$, $L_0 = a_{\overline{n}|}$

时间	还款额	支付利息	偿还本金	本金余额
0				$a_{\overline{n} }$
1	1	$1 - v^n$	v^n	$a_{\overline{n-1} }$
2	1	$1 - v^{n-1}$	v^{n-1}	$a_{\overline{n-2} }$
...	...	...	...	...
k	1	$1 - v^{n-k+1}$	v^{n-k+1}	$a_{\overline{n-k} }$
...	...	...	...	...
$n-1$	1	$1 - v^2$	v^2	$a_{\overline{1} }$
n	1	$1 - v$	v	0





例：一笔贷款的期限为2年，每季度末等额偿还一次，每年复利4次的年利率为6%，如果第一年末偿还的本金为2000元，计算在第二年末应偿还的本金。

解：每季度偿还一次，偿还8次，季度有效利率为 $i = 1.5\%$

第1年末（第4次）偿还的本金： $P_4 = Rv^{8-4+1} = Rv^5$

$$P_k = R \cdot v^{n-k+1}$$

第2年末（第8次）偿还的本金： $P_8 = Rv^{8-8+1} = Rv$

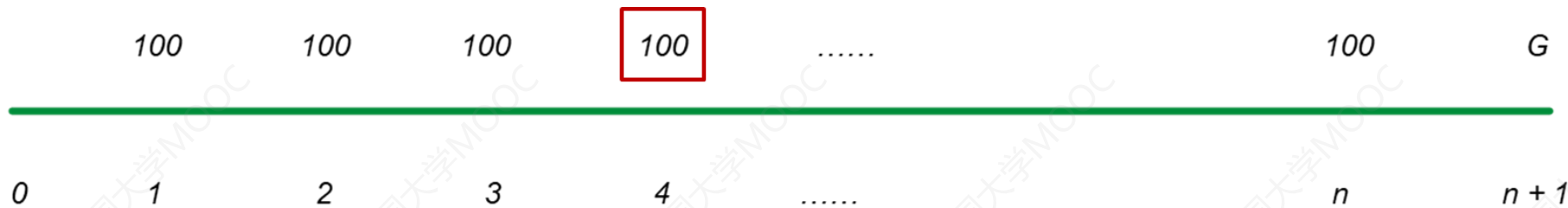
所以 $P_8 / P_4 = v^{-4} = (1 + i)^4$ ，即

$$P_8 = P_4 (1 + i)^4 = 2000(1.015)^4 = 2122.73 \text{ (元)}$$

例：本金为1000的贷款在每年末偿还100，直至偿还完所有贷款本息为止，如果最后一次偿还金额不足100时，按实际需要偿还的金额偿还。假设年利率为4%，计算第4次的还款额中包含的利息和本金分别是多少。



$$L_0 = 1000$$



解：第三次还款后，未偿还本金余额为

$$L_3 = 1000(1.04)^3 - 100s_{\overline{3}|0.04} = 812.70$$

从而有 $I_4 = 0.04 \times 812.70 = 32.51$

$$P_4 = 100 - 32.15 = 67.49$$

另一种解法（了解）

$$1000 = 100a_{\overline{n}|0.04} \Rightarrow n = 13.02392$$

$$P_k = Rv^{n-k+1} \Rightarrow P_4 = 100v^{13.02392-4+1} = 67.49$$



例：用EXCEL构造等额分期偿还表（参见MOOC）

	A	B	C	D	E	F
1	例：贷款本金为100000，年利率为6%，期限为10年					
2	时间	偿还额	偿还本金	支付利息	未偿还本金余额	
3	0				100,000	
4	1					
5	2					
6	3					
7	4					
8	5					
9	6					
10	7					
11	8					
12	9					
13	10					

等额偿债基金

例：借款人从银行获得10000元的贷款，期限为5年，年利率为6%。双方约定：

- （1）借款人每年末向银行支付600元利息；
 - （2）借款人在银行开设一个存款帐户，每年末存入1791.76元，按5.5%的利率计息。到第5年末，帐户余额正好是10000元，用于偿还贷款本金。
- 借款人在银行开设的帐户就是**偿债基金**。
 - 借款人每年向偿债基金的储蓄额相等，为**等额**偿债基金。



符号：

- 贷款利率： i
- 偿债基金利率： j
- 每年支付利息： $I = iL_0$
- 每年向偿债基金的储蓄额： D

等额偿债基金法需要解决的问题？

借款人每年末向偿债基金的储蓄额为 D



$$Ds_{\overline{n}|j} = L_0 \quad \Rightarrow \quad D = \frac{L_0}{s_{\overline{n}|j}}$$

借款人在每年末的付款总金额为 $I + D = iL_0 + D$

第 k 年末，未偿还本金余额为 $L_0 - D \cdot s_{\overline{k}|j}$

特例： $j = i$

当 $j = i$ 时，借款人在每年末的付款总金额为

$$I + D = iL_0 + \frac{L_0}{s_{\overline{n}|i}} = L_0 \left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \right) = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|i}} = R \quad (\text{等额分期偿还金额})$$

注：

$$\left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|i}} \right) = \frac{1}{a_{\overline{n}|i}}$$

结论：当 $j = i$ 时，等额分期偿还法 = 等额偿债基金法

例：对借款人而言，下列哪种贷款的成本较低？

分期偿还法：贷款利率为 6%

偿债基金法：贷款利率为 6%，偿债基金利率为 5%

解释：在偿债基金方法中，贷款成本**高于6%**。

例：对借款人而言，下列哪种贷款的成本较低？

分期偿还法：贷款利率为 6%

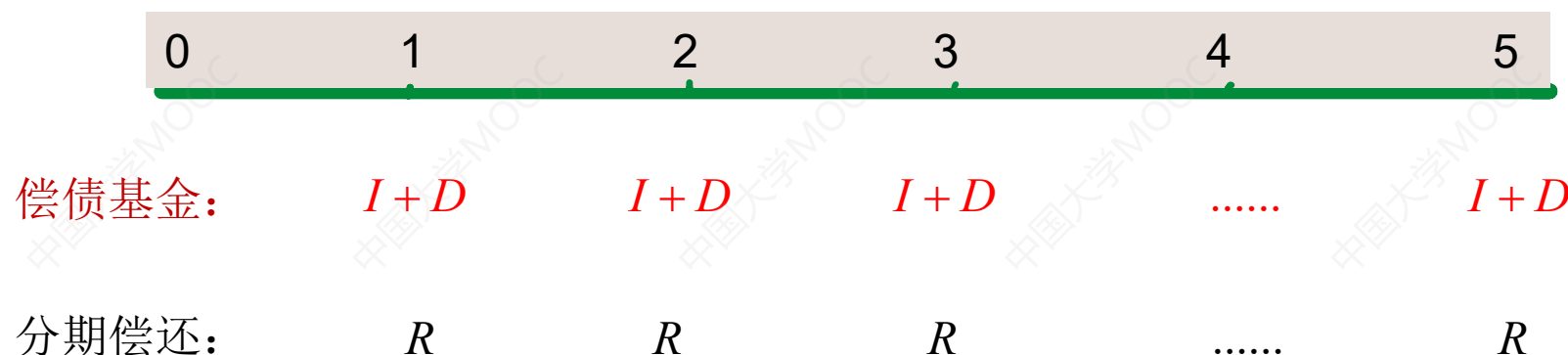
偿债基金法：贷款利率为 6%，偿债基金利率为 7%

解释：在偿债基金方法中，贷款成本**低于6%**。

例：两笔贷款的本金均为10000元，期限均为5年，但偿还方式不同：

- 第一笔：采用偿债基金方法偿还，贷款利率为6%，偿债基金利率为5%。
- 第二笔：采用等额分期方法偿还。

当第二笔贷款的利率为多少时，两笔贷款对借款人而言是等价的。



解：

	0	1	2	3	4	5
偿债基金：		$I + D$	$I + D$	$I + D$		$I + D$
分期偿还：		R	R	R		R

偿债基金法：

$$I + D = L_0 \left(i + \frac{1}{s_{\overline{n}|j}} \right) = 10000 \left(0.06 + \frac{1}{s_{\overline{5}|0.05}} \right) = 2409.75$$

分期偿还法：

$$R = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|r}} = \frac{10000}{a_{\overline{5}|r}} \quad \text{令此式等于} 2409.75, \text{ 有 } r = 6.552\%$$

注：分期偿还法的贷款利率（6.552%）**大于**偿债基金法的贷款利率（6%）。



例：用EXCEL构造等额偿债基金表（参见MOOC）

	A	B	C	D	E
1	例：贷款本金100000，贷款期限10年，用偿债基金方法偿还。贷款利率6%，偿债基金利率5%				
2	时间	支付利息	向偿债基金的储蓄额	偿债基金的累积值	未偿还本金余额
3	0				100000
4	1				
5	2				
6	3				
7	4				
8	5				
9	6				
10	7				
11	8				
12	9				
13	10				

偿债基金的价值方程

价值方程:

$$L_0(1+i)^n = iL_0 \times s_{\overline{n}|i} + D \times s_{\overline{n}|j}$$

验证: 右边

$$= iL_0 \times s_{\overline{n}|i} + D \times s_{\overline{n}|j} = iL_0 \times s_{\overline{n}|i} + L_0$$

$$= L_0 \left(i \times \frac{(1+i)^n - 1}{i} + 1 \right)$$

$$= L_0(1+i)^n = \text{左边}$$

偿债基金的价值方程：推广形式（了解）

$$L_0(1+i)^n = iL_0 \times s_{\overline{n}|i} + D \times s_{\overline{n}|j}$$



$$L_0(1+i)^n = W \times s_{\overline{n}|i} + D \times s_{\overline{n}|j}$$

W : service payment, 可以不等于 iL_0

例：本金10000，年利率5%，在10年内用偿债基金方法偿还。银行要求借款人每年末支600的服务费（service payment）。如果偿债基金的年利率为4%，计算：（1）借款人每年向偿债基金的储蓄额。（2）与等额分期偿还方法等价的贷款利率 r 。

$$10000(1+5\%)^{10} = 600s_{\overline{10}|5\%} + D \times s_{\overline{10}|4\%} \quad \Rightarrow D = 728.15$$

$$10000 = (600 + 728.15)a_{\overline{10}|r} \quad \Rightarrow r = 5.52\%$$

问题：当服务费增加时， r 会如何变化？

等额分期偿还与等额偿债基金的比较

- 区别：已偿还本金的计息方式不同。

- 分期偿还：已偿还本金按 i 计息。

$$L_k = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k}|i}$$

- 偿债基金：已偿还本金按 j 计息。

$$L_k = L_0 - Ds_{\overline{k}|j}$$

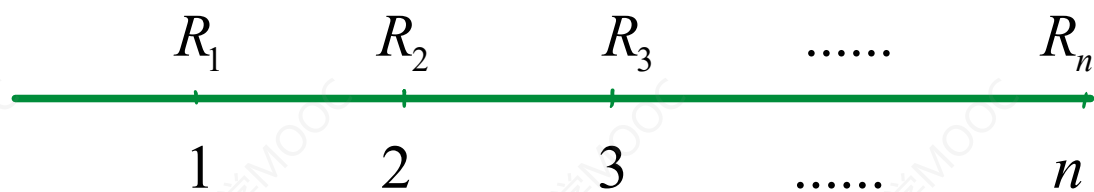
- 特例：当 $i=j$ 时，两种方法等价。

变额分期偿还

假设贷款金额为 L_0 ，每年末偿还 R_t ($t = 1, 2, \dots, n$) 则有
$$L_0 = \sum_{t=1}^n v^t R_t$$

变额分期偿还方法：

- (1) 等额本金
- (2) 算术级数变化
- (3) 几何级数变化



例（等额本金）：一笔10000元的贷款，期限5年，年利率5%，每年末偿还2000元本金。构造分期偿还表。

年份	偿还本金	未偿还本金余额	支付当年利息	每年偿还的总金额
(1)	(2)	(3)	(4)	(5) = (2) + (4)
0		10000		
1	2000	8000	500	2500
2	2000	6000	400	2400
3	2000	4000	300	2300
4	2000	2000	200	2200
5	2000	0	100	2100

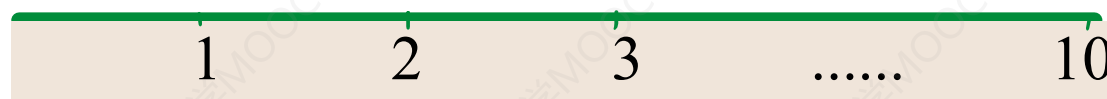
例：10年期的贷款，本金2000，每年末偿还一次。可用两种方法偿还：

(1) 等额分期偿还，年利率为8.07%

(2) 每年末偿还本金200，并按年利率 i 支付利息。

假设在两种偿还方法下，10年期间的偿还额之和相等，求 i 。

R R R R 等额分期方法



偿还本金： 200 200 200 200

本金余额： 2000 1800 1600 1400 0

支付利息： $2000i$ $1800i$ $1600i$ $200i$

等额本金方法



解:

等额分期方法: $Ra_{10|0.0807} = 2000$

$$R = 299$$

⇒ 偿还额之和 = 2990

	R	R	R		R	等额分期方法
	1	2	3		10	
偿还本金:	200	200	200		200	
本金余额: 2000	1800	1600	1400		0	等额本金方法
支付利息:	$2000i$	$1800i$	$1600i$		$200i$	

等额本金方法:

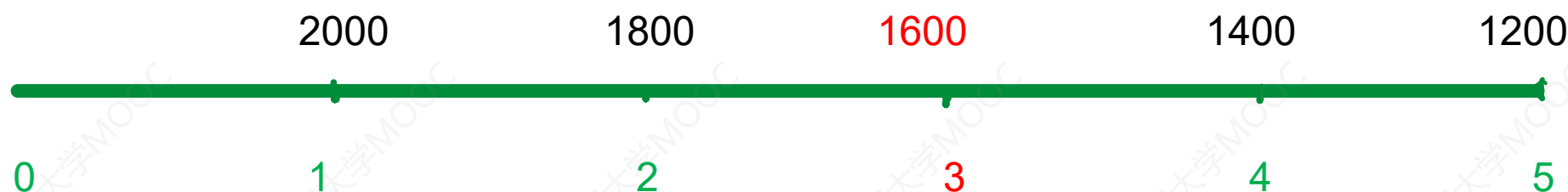
$$2000 + i(2000 + 1800 + 1600 + \dots + 200) = 2990$$

$$\Rightarrow i = 9\%$$

例（算术级数变化）：贷款期限为5年，年利率为6%。借款人每年末的偿还额为：
2000，1800，1600，1400，1200。计算：

(1) 贷款本金为多少？

(2) 第三年末支付的利息和偿还的本金分别为多少？



时期:	0	1	2	3	4	5
偿还金额:		2000	1800	1600	1400	1200
等额年金:		1000	1000	1000	1000	1000
递减年金:	$200 \times$	[5	4	3	2	1]

$$(Da)_{\overline{n}|i} = \frac{n - a_{\overline{n}|i}}{i}$$

贷款本金：

$$L_0 = 1000a_{\overline{5}|0.06} + 200(Da)_{\overline{5}|0.06} = 6837.82$$

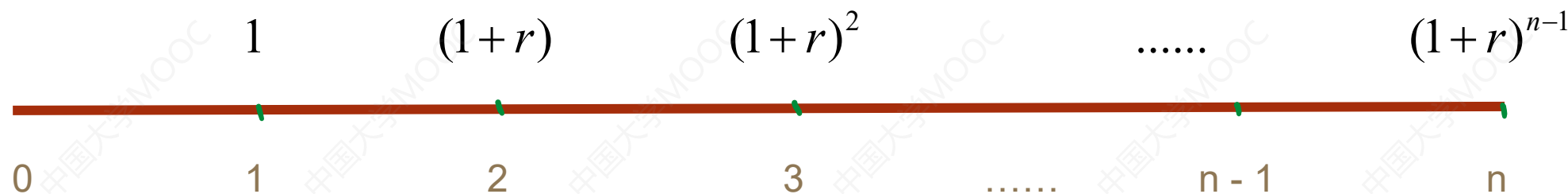
第二年末，未偿还的本金余额为（将来法）

$$L_2 = 1000a_{\overline{3}|0.06} + 200(Da)_{\overline{3}|0.06} = 3762.97$$

第三年末，支付利息 $I_3 = iL_2 = 0.06 \times 3762.97 = 225.78$

第三年末，偿还本金 $P_3 = R_3 - I_3 = 1600 - 225.78 = 1374.21$

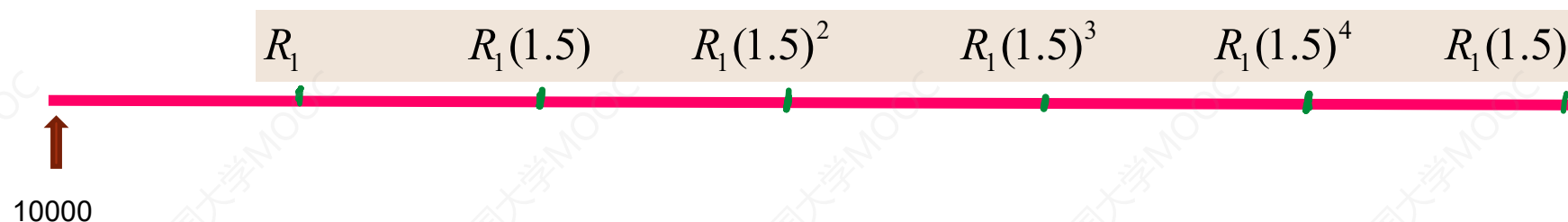
变额分期偿还：几何级数变化



$$(Ca)_{\overline{n}|i} = \frac{a_{\overline{n}|j}}{1+r}$$

$$j = \frac{i-r}{1+r}$$

例（几何级数变化）：贷款本金10000，年利率10%，期限6年，每年末偿还一次，每次的偿还金额以50%递增。构造分期偿还表。



$$j = \frac{i - r}{1 + r} = \frac{10\% - 50\%}{1 + 50\%} = -0.2667$$

$$10000 = R_1 \cdot \frac{a_{\overline{n}|j}}{1 + r} = R_1 \cdot \frac{a_{\overline{6}|-0.2667}}{1 + 0.5} = R_1 \cdot \frac{1}{1 + 0.5} \cdot \frac{1 - (1 - 0.2667)^{-6}}{-0.2667}$$

$$R_1 = 736.69$$

解：第一年末的偿还额 $R_1 = 736.69$

第一年，利息为 $I_1 = 10000 \times 0.1 = 1000$

年末偿还本金为负

$$P_1 = R_1 - I_1 = 736.69 - 1000 = -263.31$$

年末本金余额（变大） $L_1 = L_0 - P_1 = 10000 + 263.31 = 10263.31$

第二年，利息为 $I_2 = iL_1 = 0.1 \times 10263.31 = 1026.33$

年末偿还额为 $R_2 = 1.5R_1 = 736.69 \times 1.5 = 1105.04$

年末偿还本金 $P_2 = R_2 - I_2 = 1105.04 - 1026.33 = 78.71$

年末本金余额 $L_2 = L_1 - P_2 = 10263.31 - 78.71 = 10184.6$

变额分期偿还表

年份	偿还额 按50%递增	支付利息	偿还本金	本金余额
0				10000
1	736.69	1000	-263.31	10263.31
2	1105.04	1026.33	78.71	10184.60
3	1657.55	1018.46	639.09	9545.51
4	2486.33	954.55	1531.78	8013.73
5	3729.49	801.37	2928.12	5085.61
6	5594.24	508.56	5085.68	-0.07*

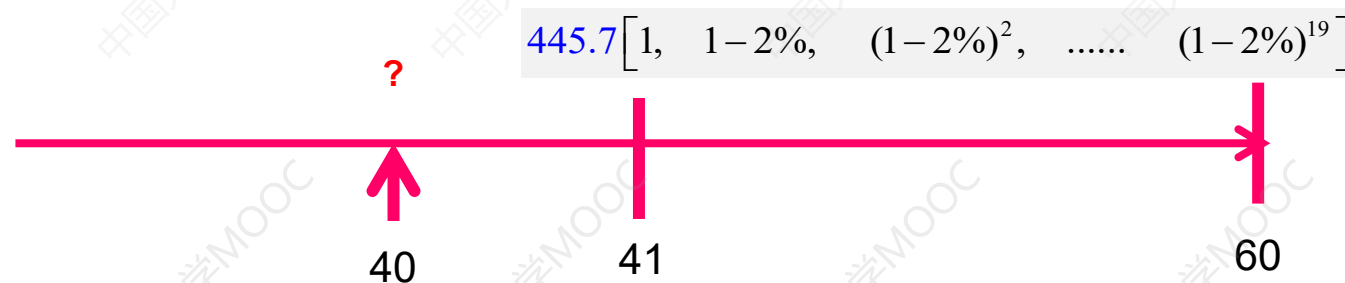
练习：贷款在60个月内分期偿还，每月末偿还一次，月利率为0.75%。第一个月末的偿还额为1000，以后每月的偿还额按2%递减。计算偿还40次以后的本金余额。

解： 第41次的偿还额 = $1000(1 - 2\%)^{40} = 445.7$

未偿还本金余额（将来法）：

$$L_{40} = 445.7 \frac{a_{\overline{20}|j}}{1+r} = 445.7 \frac{a_{\overline{20}|2.8\%}}{1-2\%} = 6889$$

$$j = \frac{i-r}{1+r} = \frac{0.75\% - (-2\%)}{1-2\%} = 2.8\%$$





中國人民大學
RENMIN UNIVERSITY OF CHINA

統計學院
SCHOOL OF STATISTICS

債務償還

變額償債基金

孟生旺

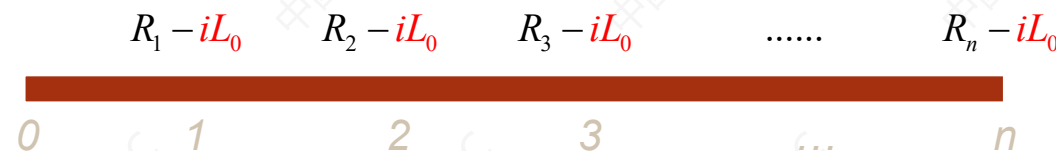


变额偿债基金

- 借款人每年偿还的总金额 R_t 包括：

- 支付利息： iL_0

- 向偿债基金储蓄： $D_t = R_t - iL_0$



- 偿债基金在第 n 年末的累积值等于贷款本金 L_0 ，即
$$L_0 = \sum_{t=1}^n D_t (1+j)^{n-t}$$

$$L_0 = \sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{n-t} - iL_0 s_{\overline{n}|j} \quad \longrightarrow \quad L_0 = \frac{\sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{n-t}}{1 + is_{\overline{n}|j}} \quad \longrightarrow \quad L_0 = \frac{\sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{-t}}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}}$$

(证明见下页)

若 $D_t > 0$ ，则 L_0 正确

证明：分子和分母均乘以 $(1+j)^{-n}$ ：

$$\text{分母} = (1 + is_{\overline{n}|j})(1 + j)^{-n}$$

$$= (1 + j)^{-n} + i \cdot a_{\overline{n}|j}$$

$$= 1 - j \cdot a_{\overline{n}|j} + i \cdot a_{\overline{n}|j}$$

$$= 1 + (i - j) \cdot a_{\overline{n}|j}$$

$$L_0 = \frac{\sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{n-t}}{1 + is_{\overline{n}|j}} = \frac{\sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{-t}}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}}$$

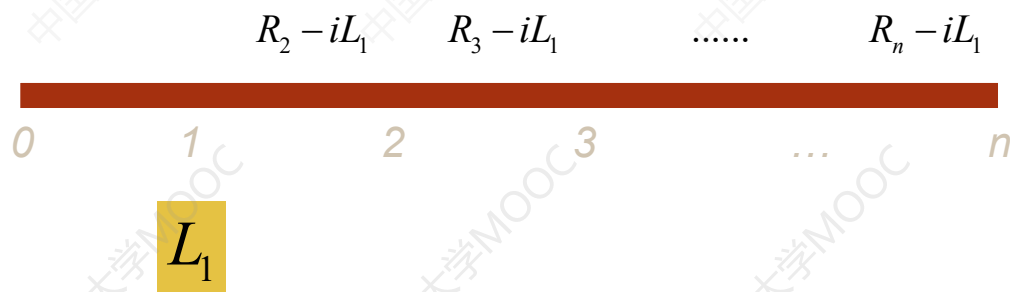
$$= \frac{\text{未来 } n \text{ 次偿还额在时间零点的现值}}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}}$$

若 $D_1 < 0$ ，首先计算 L_1

$$L_1 = \frac{\text{未来}(n-1)\text{次偿还额在第1年末的价值}}{1 + (i - j)a_{\overline{n-1}|j}}$$

然后应用 $L_1 = L_0(1 + i) - R_1$ ，倒推 L_0

$$L_0 = (L_1 + R_1) / (1 + i)$$

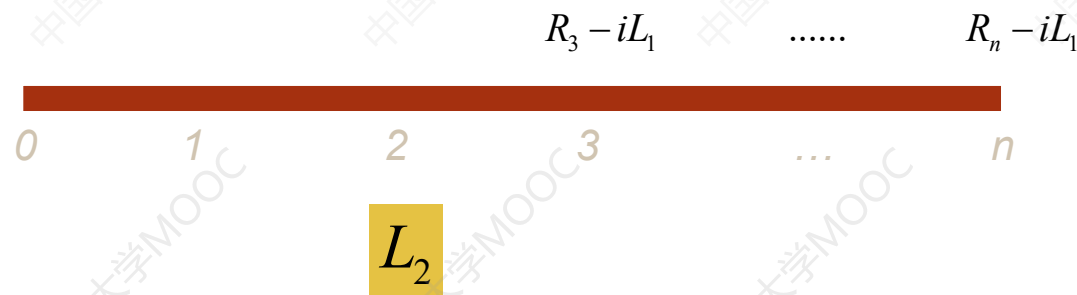




若 $D_2 < 0$ ，首先计算 L_2

$$L_2 = \frac{\text{未来}(n-2)\text{次偿还额在第2年末的价值}}{1 + (i-j)a_{\overline{n-2}|j}}$$

然后应用 $L_2 = L_1(1+i) - R_2$ ，倒推 L_1 ，再求 L_0



$$L_1 = (L_2 + R_2) / (1 + i)$$

$$L_0 = (L_1 + R_1) / (1 + i)$$

例： 贷款期限5年，用偿债基金方法偿还。贷款利率10%，偿债基金利率8%。
借款人每年末的偿还额：1000，2000，3000，4000，5000。计算贷款本金。



$$L_0 = \frac{\sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{-t}}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}}$$

解：应用公式， $n = 5$ ， $i = 10\%$ ， $j = 8\%$

$$L_0 = \frac{1000 \times (Ia)_{\overline{5}|0.08}}{1 + (10\% - 8\%) \times a_{\overline{5}|0.08}} = 10524.69$$

$$L_0 = \frac{\sum_{t=1}^5 R_t (1+j)^{-t}}{1 + (i-j)a_{\overline{5}|j}}$$

第 1 年末向偿债基金的储蓄额 = $1000 - 10524.69 \times 0.1 = -52.47$

问题：向偿债基金的储蓄**不能为负**。



首先 L_1 :



$$L_1 = \frac{\text{未来}(n-1)\text{次偿还额在第1年末的价值}}{1 + (i - j)a_{\overline{n-1}|j}} = \frac{1000a_{\overline{4}|0.08} + 1000(Ia)_{\overline{4}|0.08}}{1 + (10\% - 8\%)a_{\overline{4}|0.08}} = 10573.9$$

从 L_1 倒推 L_0

$$L_1 = L_0(1 + i) - R_1$$

$$L_0 = (L_1 + R_1) / (1 + i) = 10521.73$$

变额偿债基金表

年份	每年末的 偿还额	支付 利息	向偿债 基金储蓄	偿债基金 的累积值	本金余额
0				0	$L_0 = 10521.73$
1	1000	1000	0	0	$L_1 = 10573.90$
2	2000	1057.39	942.61	942.61	9631.29
3	3000	1057.39	1942.61	2960.63	7613.27
4	4000	1057.39	2942.61	6140.09	4433.81
5	5000	1057.39	3942.61	10573.90	0

注：第1年应偿还利息1052.17，实际支付1000，将第1年末的负偿还 - 52.17本金化：
 $L_1 = L_0 - (-52.17) = 10573.90$



练习题

- 贷款期限5年，用偿债基金方法偿还。贷款年利率10%，偿债基金利率8%。
借款人每年末的偿还额分别为：1000，1000，5000，5000，5000
- 借款人在时间零点可以获得的贷款本金是多少？
- 如果将这笔贷款转化为等价的分期偿还方法偿还（等价的含义：在两种偿还方法下，借款人每年的付款金额相等），分期偿还的年利率是多少？



中國人民大學
RENMIN UNIVERSITY OF CHINA

統計學院
SCHOOL OF STATISTICS

債務償還方法

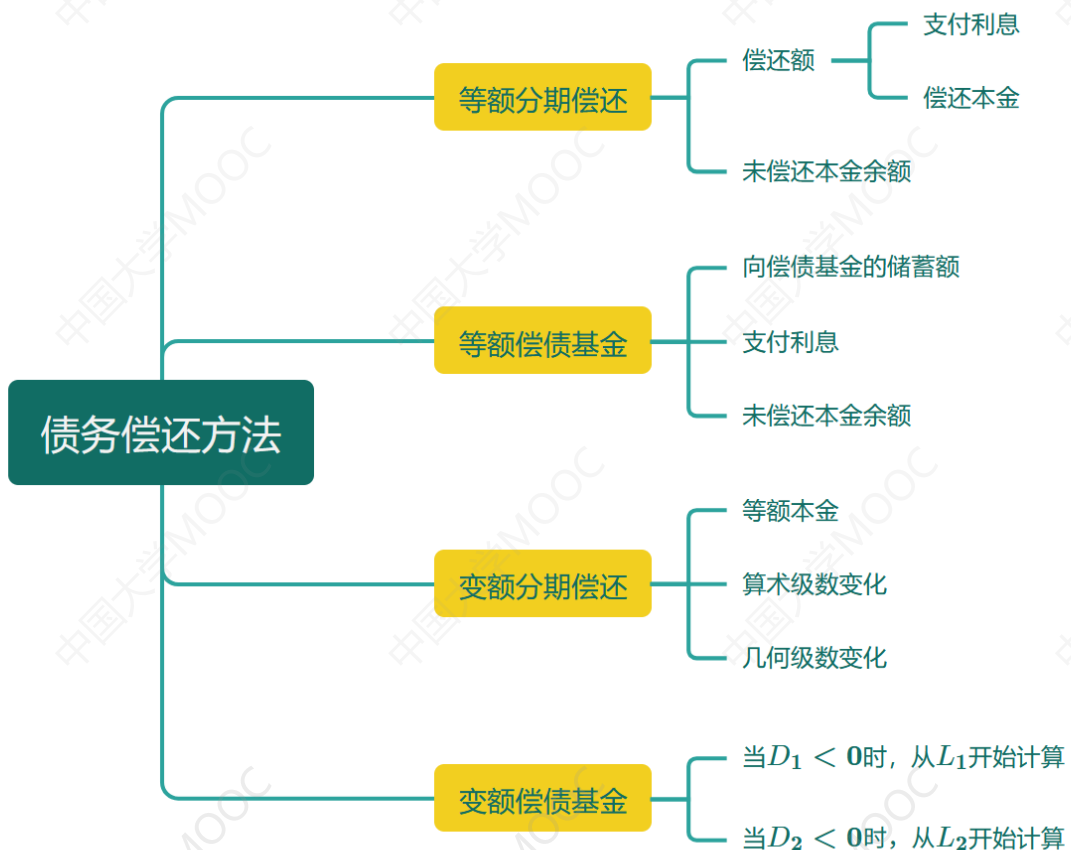
小結

孟生旺





债务偿还方法



等额分期偿还

每次偿还的金额：

$$Ra_{\overline{n}|i} = L_0 \quad \Leftrightarrow \quad R = \frac{L_0}{a_{\overline{n}|i}}$$

利息和本金的分解：

$$\begin{cases} I_k = R(1 - v^{n-k+1}) \\ P_k = R \cdot v^{n-k+1} \end{cases}$$

未偿还的本金余额：

$$L_k = Ra_{\overline{n-k}|i} = L_0(1+i)^k - Rs_{\overline{k}|i}$$

将来法

过去法

等额偿债基金

每年末向偿债基金的**储蓄额**: $D = \frac{L_0}{s_{\overline{n}|j}}$

每年末的**付款总金额**: $I + D = iL_0 + D$

注: 当 $j = i$ 时, $I + D = R$

偿债基金 = 分期偿还

第 k 年末的**未偿还本金余额**: $L_k = L_0 - D \cdot s_{\overline{k}|j}$

(偿债基金)

$L_k = L_0(1 + i)^k - Rs_{\overline{k}|i}$

(分期偿还)

等额偿债基金的价值方程

$$L_0(1+i)^n = iL_0 \times s_{\overline{n}|i} + D \times s_{\overline{n}|j}$$



$$L_0(1+i)^n = W \times s_{\overline{n}|i} + D \times s_{\overline{n}|j}$$

W : service payment, 可以不等于 iL_0

变额分期偿还

- 付款额R的变化方式:

- 等额本金（利息递减）
- 算术级数变化
- 几何级数变化

$$L_0 = \sum_{t=1}^n (1+i)^{-t} R_t$$

变额偿债基金

- 借款人每年偿还的总金额 R_t 包括：
 - 支付利息： iL_0
 - 向偿债基金储蓄是变化的： $D_t = R_t - iL_0$
- 偿债基金在第 n 年末的累积值等于贷款本金 L_0 ，即

$$L_0 = \frac{\sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{n-t}}{1 + is_{\overline{n}|j}} = \frac{\sum_{t=1}^n R_t (1+j)^{-t}}{1 + (i-j)a_{\overline{n}|j}}$$

若 $D_t > 0$ ，则 L_0 正确

若 $D_1 < 0$ ，首先计算 L_1

$$L_1 = \frac{\sum_{t=2}^n R_t (1+j)^{n-t}}{1 + is_{\overline{n-1}|j}}$$

然后应用 $L_1 = L_0(1+i) - R_1$ ，倒推 L_0

若 $D_2 < 0$ ，首先计算 L_2

$$L_2 = \frac{\sum_{t=3}^n R_t (1+j)^{n-t}}{1 + is_{\overline{n-2}|j}}$$

然后应用 $L_2 = L_1(1+i) - R_2$ ，倒推 L_1 ，再求 L_0

