中国人民大學 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

债 券

孟生旺

主要内容

- **债券价格**
  - 基本公式、溢价公式（重点）
  - 基价公式、Makeham公式（了解）
- **债券的账面值**
  - 理论方法、半理论方法、实践方法
- **分期偿还债券**
- **可赎回债券**
- **贴现债券**

债券的含义和类型

- **含义：**由筹资者向投资者出具的在一定时期还本付息的债权债务凭证。

- **种类：**
  - 政府债券
    - 国债
    - 地方政府债券
  - 金融债券
  - 公司债券

- 债券的基本要素：
  - 票面价值（面值，F）：100或1000元。
  - 价格（P）：平价，溢价，折价
  - 票面利率（息票率，r）。根据利息支付方式，分为：
    - 附息债券（coupon）
    - 零息债券（zero - coupon）

符号

P 债券的价格

i 到期收益率（**重点**）

F 面值

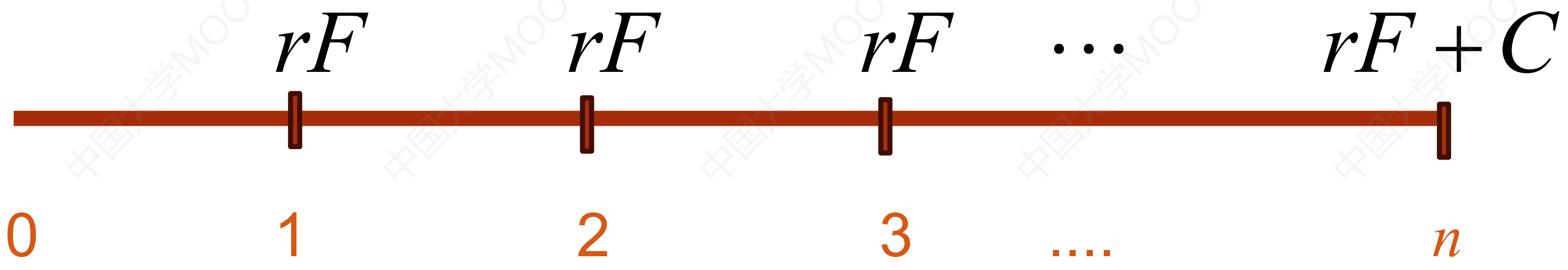
r 息票率

rF 息票收入

C 债券的偿还值, 通常等于债券的面值 , 即 $C = F$

n 息票的支付次数。

债券的现金流:



债券的定价公式

- 基本公式
- 溢价公式
- 基价公式（了解）
- Makeham公式（了解）

基本公式

$$P = rFa_{\overline{n}|} + C\,v^n$$

F	面值
C	偿还值
r	息票率
n	支付次数

	rF	rF	rF	$\cdots$	$rF + C$
0	1	2	3	......	n
	rFv	rFv^2	rFv^3	$\cdots$	$rFv^n + Cv^n$

$$P = rF\sum_{t=1}^{n} v^{t} + C \cdot v^{n}$$

- **如何影响债券价格？**
  - 到期收益率 i
  - 期限 n

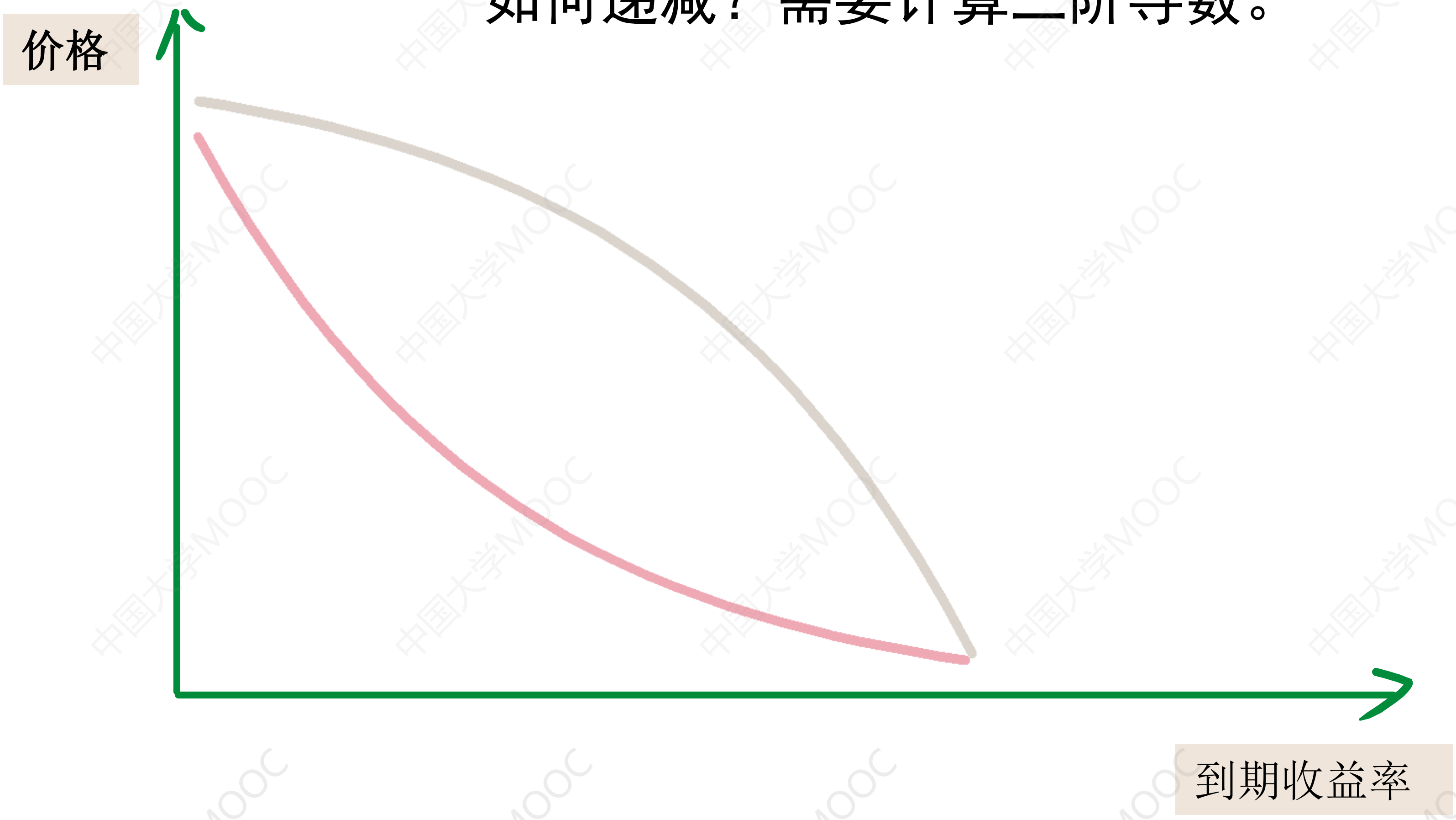
债券价格关于到期收益率（利息力表示）的一阶导数小于零：

$$P(\delta) = rF\sum_{t=1}^{n} \mathrm{e}^{-t\delta} + C \cdot \mathrm{e}^{-n\delta}$$

$$P'(\delta) = -trF\sum_{t=1}^{n} \mathrm{e}^{-t\delta} - nC \cdot \mathrm{e}^{-n\delta} < 0$$

一阶导数小于零，说明 P 是 到期收益率的减函数

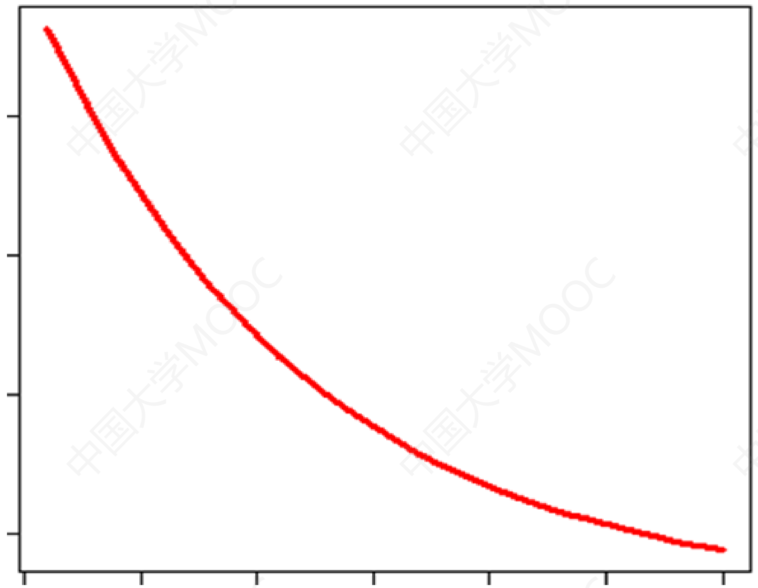
一阶导数小于零，说明 P 是 到期收益率 的减函数。
如何递减？需要计算二阶导数。



$$P(\delta) = rF\sum_{t=1}^{n} \mathrm{e}^{-t\delta} + C \cdot \mathrm{e}^{-n\delta}$$

$$P'(\delta) = -trF\sum_{t=1}^{n} \mathrm{e}^{-t\delta} - nC \cdot \mathrm{e}^{-n\delta} < 0$$

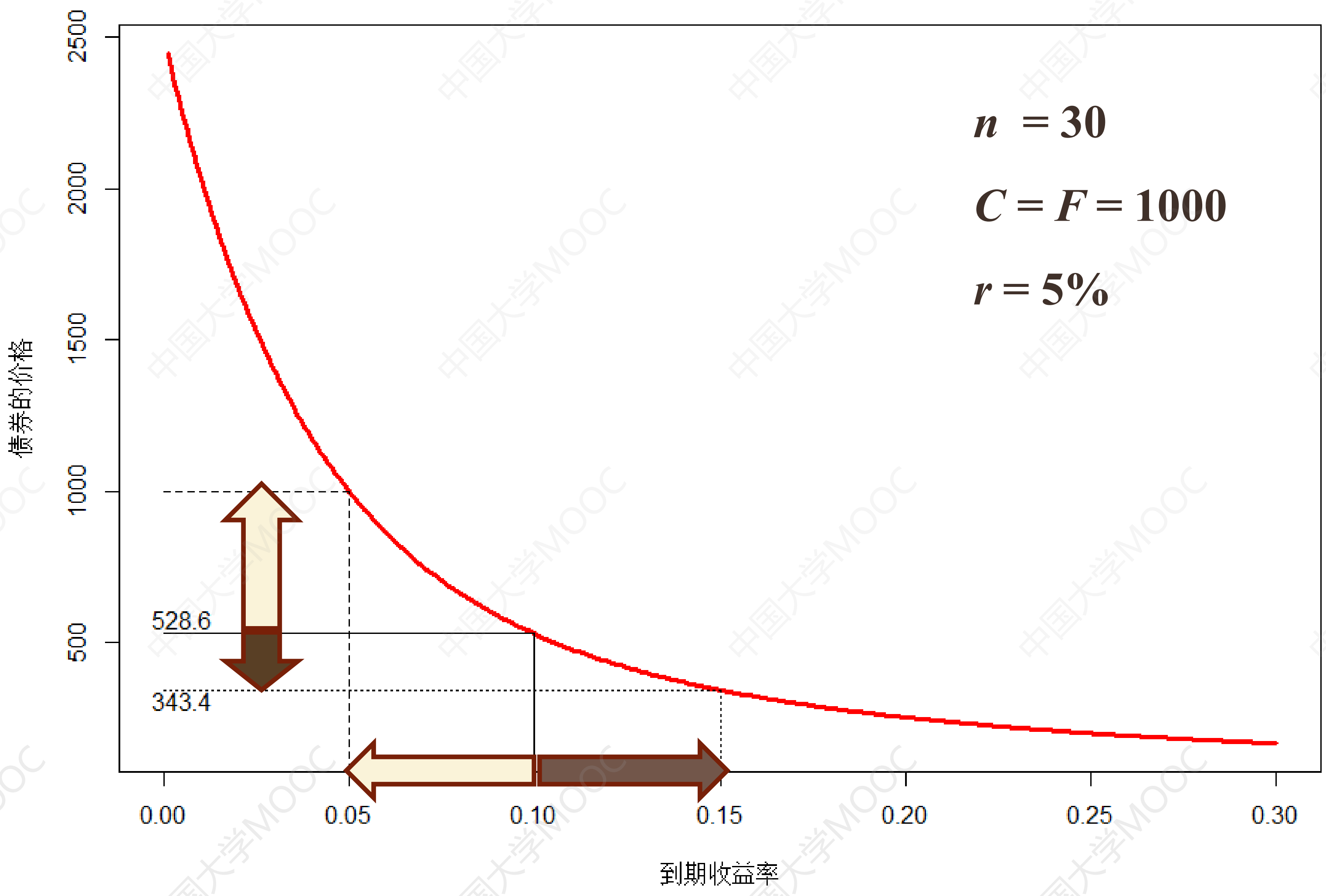
$$P''(\delta) = t^2 rF\sum_{t=1}^{n} \mathrm{e}^{-t\delta} + n^2 C \cdot \mathrm{e}^{-n\delta} > 0$$



二阶导数大于零，说明 P 是到期收益率 的下凸函数

债券价格与到期收益率的关系

$$P(i) = 50a_{\overline{30|}i} + 1000v^{30}$$



i 增加时，P 下降较慢；

i 减小时，P 上升较快。

例：30年期的债券，面值和到期偿还值为1000，年息票率为12%，每季度支付一次利息，售价为850。计算该债券每季度复利一次的年名义收益率。

假设每个季度的收益率为 j

$$850 = 30a_{\overline{120}|j} + 1000(1+j)^{-120} \Rightarrow j = 3.54\%$$

故年名义收益率为 $4j$ = **14.16%**

债券到期时间 n 对债券价格 P 的影响

（假设面值和到期偿还值相等，均为F）

$$P = rFa_{\overline{n}|} + Fv^n$$

$$P = \frac{rF}{i} + F\left(1 - \frac{r}{i}\right)v^n = \frac{rF}{i} + F\left(1 - \frac{r}{i}\right)\mathrm{e}^{-n\delta}$$

若$r < i$, 第二项大于零， n 越大， P越小

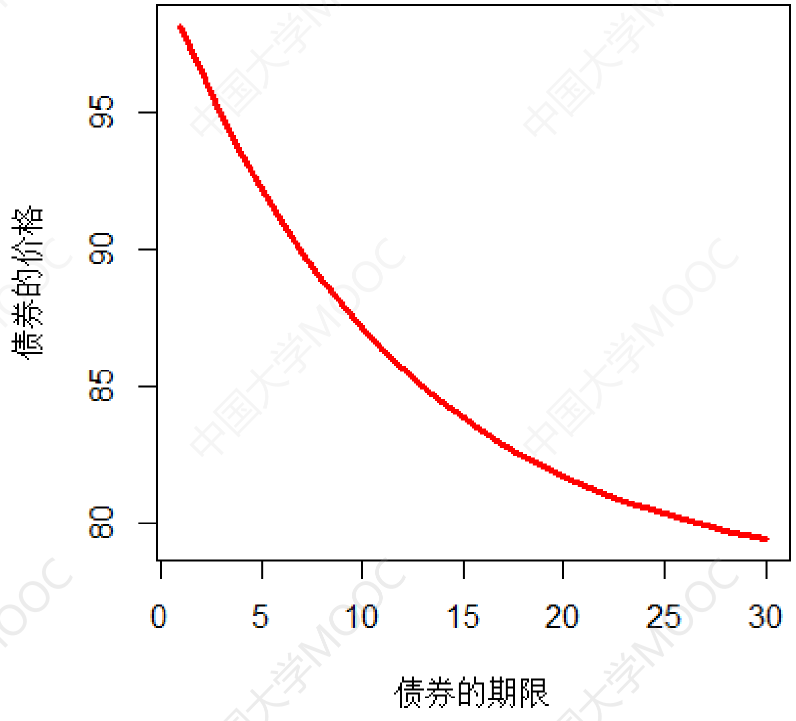
若$r > i$, 第二项小于零， n 越大， P越大

债券期限*n* 对债券价格P的影响？

$$P=\frac{rF}{i}+F\left(1-\frac{r}{i}\right)e^{-n\delta}$$

$$\frac{dP}{dn}=-F\left(1-\frac{r}{i}\right)\cdot\delta e^{-n\delta}\ ,\qquad \frac{d^2P}{dn^2}=F\left(1-\frac{r}{i}\right)\cdot\delta^2 e^{-n\delta}$$

$$\text{if}\ \ r<i,\ \begin{cases}\dfrac{dP}{dn}<0\\[2ex] \dfrac{d^2P}{dn^2}>0\end{cases}$$

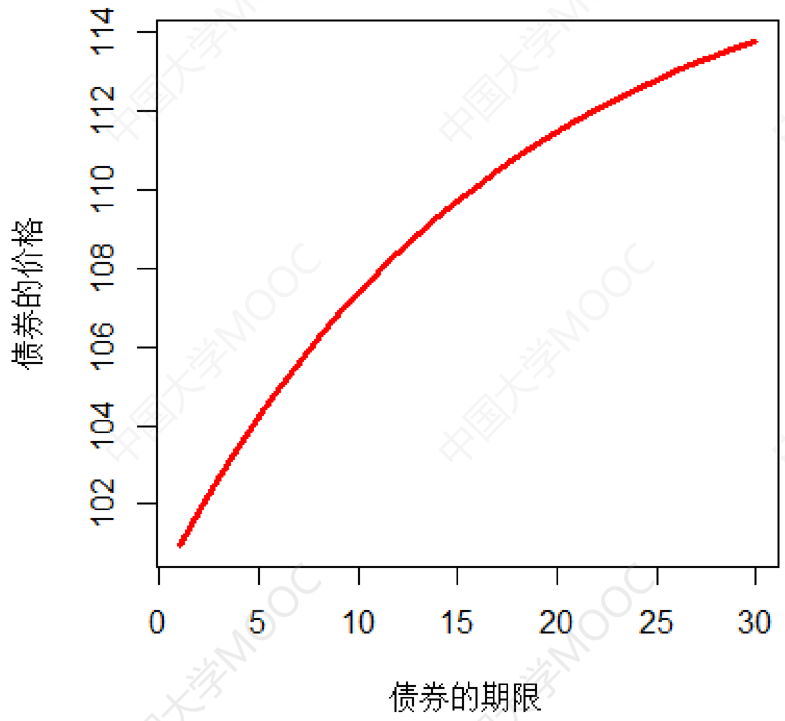


债券期限n 对债券价格的影响？

$$P=\frac{rF}{i}+F\left(1-\frac{r}{i}\right)v^{n}$$

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}n}=-F\left(1-\frac{r}{i}\right)\cdot\delta \mathrm{e}^{-n\delta}\,,\qquad \frac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}n^2}=F\left(1-\frac{r}{i}\right)\cdot\delta^2 \mathrm{e}^{-n\delta}$$

$$\text{if}\quad r>i,\quad \begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}n}>0\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}^2P}{\mathrm{d}n^2}<0\end{cases}$$



溢价公式

r 息票率，息票收入与面值之比 $r=\dfrac{rF}{F}$

g 修正息票率，息票收入与到期偿还值 C 之比

$$g=\frac{rF}{C} \quad \Leftrightarrow \quad gC=rF=\text{息票收入}$$

溢价公式： $P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$

$$P = rFa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

$$= rFa_{\overline{n}|} + C\left(1 - ia_{\overline{n}|}\right)$$

$$= C + (rF - iC)a_{\overline{n}|}$$

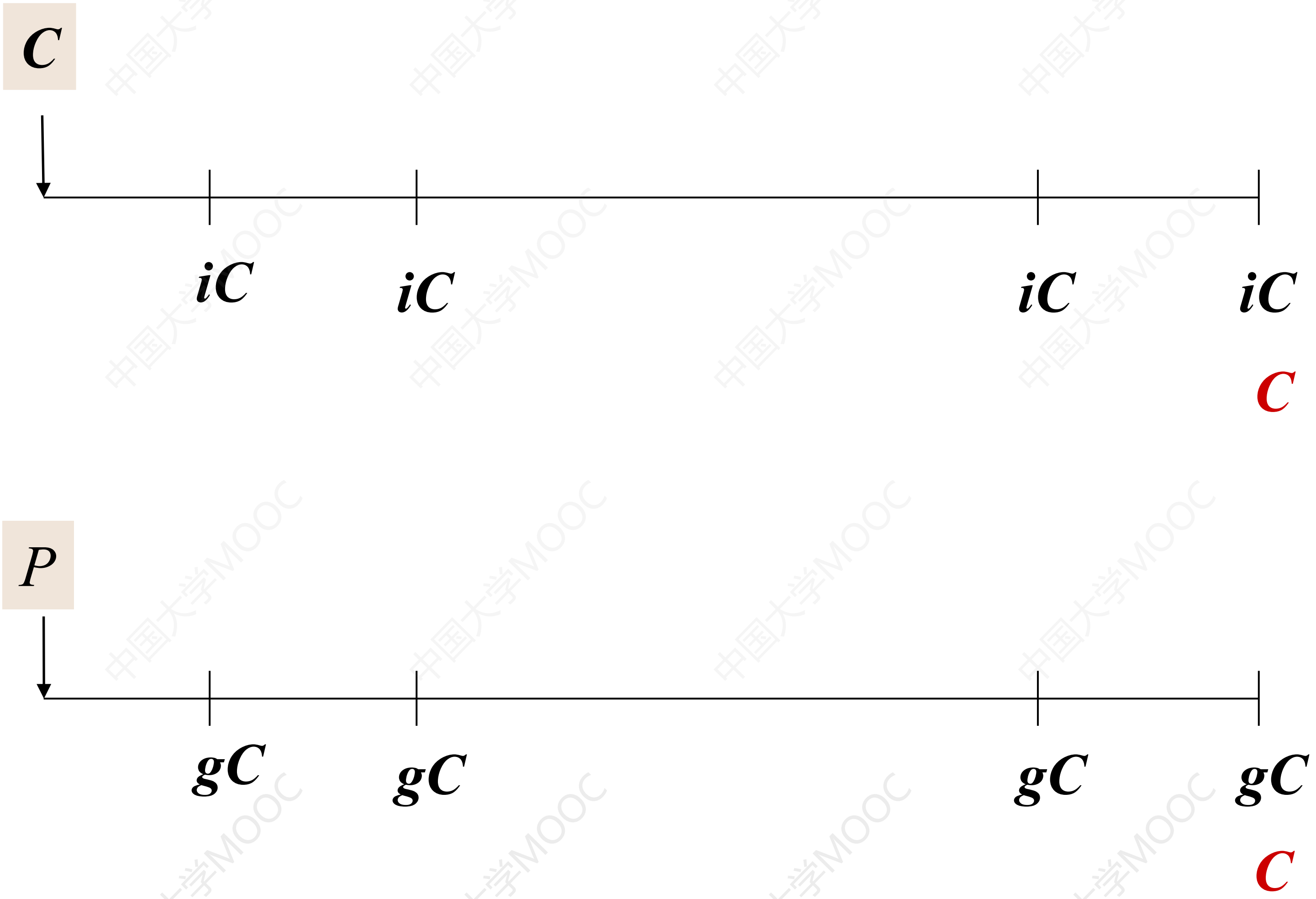
$$= C + (gC - iC)a_{\overline{n}|}$$

$$= C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

$$a_{\overline{n}|} = \frac{1 - v^n}{i} \Rightarrow v^n = 1 - ia_{\overline{n}|}$$

$$rF = gC$$

溢价公式的解释：$P = C + C(g - i)\, a_{\overline{n}|} \Leftrightarrow P - C = C(g - i)\, a_{\overline{n}|}$



溢价公式的常见形式

因为 $rF = gC$ ， 所以，当 $C = F$ 时，$g = r$

$$P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

$$P = F + F(r - i)a_{\overline{n}|}$$

溢价公式的应用

债券价格与面值的关系?

$$P = F + F(r - i)a_{\overline{n}|}$$

- 平价发行，$r = i$
- 溢价发行，$r > i$
- 折价发行，$r < i$

溢价公式的应用

债券期限 n 如何影响债券价格？

$$P = F + F(r - i)a_{\overline{n}|}$$

- 若 $r = i$，价格与期限无关
- 若 $r > i$，期限越长，价格越高
- 若 $r < i$，期限越长，价格越低

例：一个5年期债券每半年支付一次利息，年息票率为5%，到期按面值100偿还。如果到期年收益率为7%，计算该债券的价格。

$n = 10$

$r = 2.5\%$

$F = 100$

0	1	2	3	……	10
	2.5	2.5	2.5	……	2.5 100

半年期有效收益率：$1 + 7\% = (1 + j)^2 \Rightarrow j = 3.441\%$

基本公式： $P = 2.5a_{\overline{10}|} + 100v^{10} = 92.15$

溢价公式： $P = 100 + 100(2.5\% - 3.441\%)a_{\overline{10}|} = 92.15$

债券在付息日期的价格和账面值

- 账面值：投资余额
- 基于购买债券时的到期收益率 i 计算
- 不是市场价格
- 在付息日期，价格与账面值相等

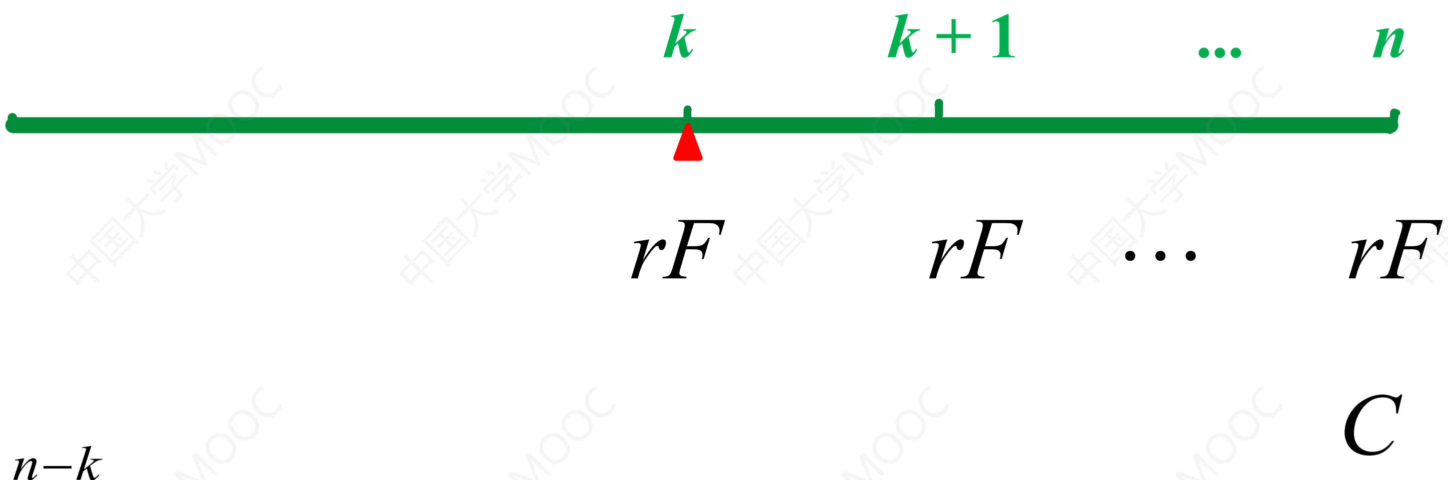
$$rF \quad rF \quad rF \quad \cdots \quad rF + C$$

0 1 2 3 …… n

在付息日期（记为 k）：价格与账面值相等

（注：假设到期收益率 保持不变 ）

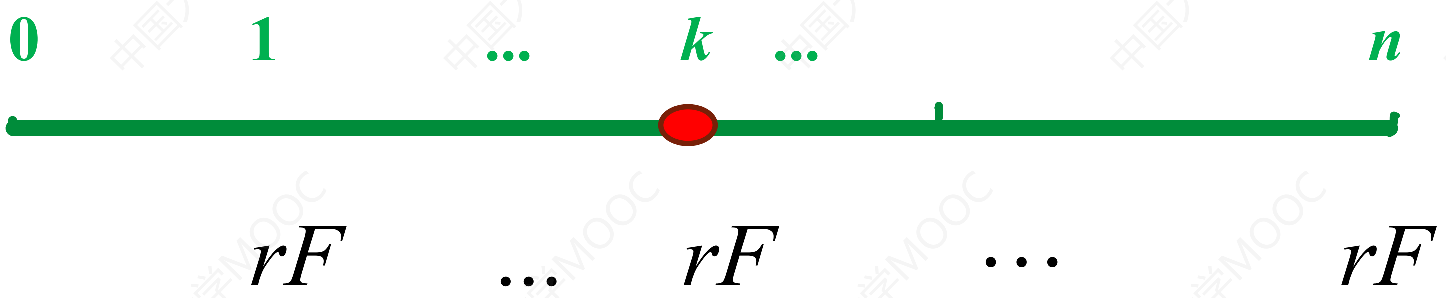
（1）将来法



$$V_k = rFa_{\overline{n-k}|i} + Cv^{n-k}$$

$$= C + C(g-i)a_{\overline{n-k}|i}$$

（2）过去法



$$V_k = P(1+i)^k - rF \cdot s_{\overline{k|}}$$

过去法 = 将来法

$$P(1+i)^k - rF \cdot s_{\overline{k}|} = \left(rFa_{\overline{n}|} + Cv^n\right)(1+i)^k - rF \cdot s_{\overline{k}|}$$

$$= (rFa_{\overline{n}|} + Cv^n)(1+i)^k - rF \cdot a_{\overline{k}|}(1+i)^k$$

$$= rF(a_{\overline{n}|} - a_{\overline{k}|})(1+i)^k + Cv^{n-k}$$

$$a_{\overline{n}|} - a_{\overline{k}|} = v^k a_{\overline{n-k}|}$$

$$= rFa_{\overline{n-k}|} + Cv^{n-k}$$

计算账面值的递推公式

$$V_0 = P$$

$$V_k = V_{k-1}(1+i) - rF$$

例：债券的面值为1000元，年息票率为6%，期限为3年，到期按面值偿还。到期收益率为5%，计算债券在各年末的价格和账面值。

解：

$$V_0 = 1000 + 1000(0.06 - 0.05)a_{\overline{3}|0.05} = 1027.23$$

$$V_1 = V_0(1 + 5\%) - 60 = 1018.59$$

$$V_2 = V_1(1 + 5\%) - 60 = 1009.52$$

$$V_3 = V_2(1 + 5\%) - 60 = 1000$$

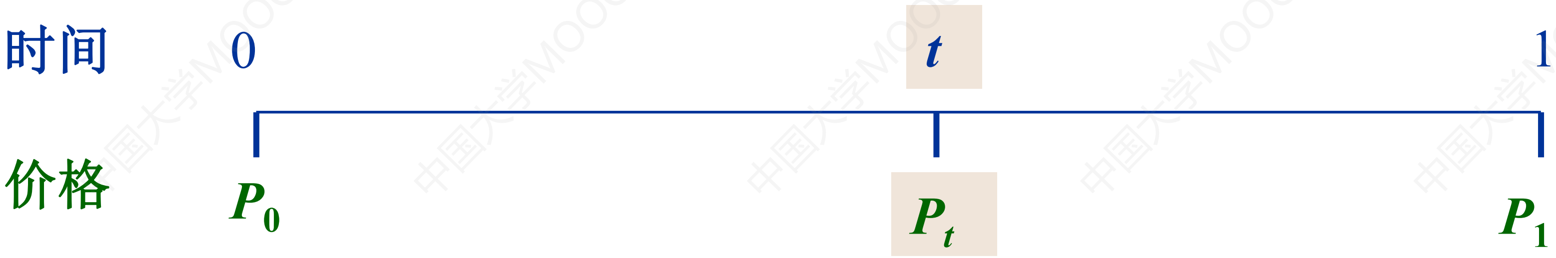
溢价27.23元的分摊过程

年份	息票收入	应得利息收入（按5%的到期收益率计算）	溢价分摊	账面值
0				1027.23
1	60	$1027.23 \times 5\% = 51.36$	8.64	1018.59
2	60	$1018.59 \times 5\% = 50.93$	9.07	1009.52
3	60	$1009.52 \times 5\% = 50.48$	9.52	1000
合计	180	152.77	27.23	

溢价分摊金额之和 = 溢价 (premium)。

非付息日期的价格

- 上一个付息日期的价格为P_0
- 下一个付息日期的价格为P_1
- 用 P_t 表示在两个付息日期之间的价格（$0 < t < 1$）



$$P_t = (1+i)^t P_0$$

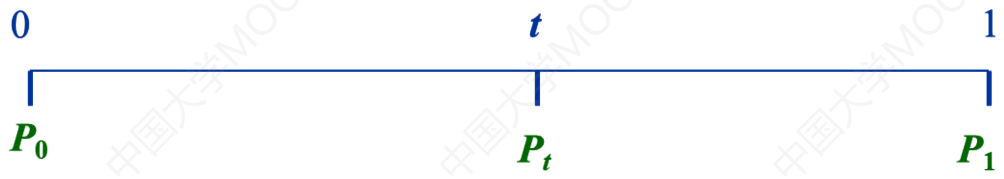
非付息日期的账面值

- **账面值**：从价格中扣除应计利息。
- 在时间 t（$0 < t < 1$）的价格

$$P_t = (1+i)^t P_0$$

- 在时间 t 的账面值 为

$$V_t = (1+i)^t P_0 - (rF)_t$$



$$V_t = P_t - (rF)_t$$

其中 $(rF)_t$ 表示应计利息。

应计利息 $(rF)_t$ 的计算方法：

$$V_t = (1+i)^t P_0 - (rF)_t$$

- 期末利息为rF，期初本金应为 $\dfrac{rF}{i}$

- 按复利计算应计利息为：

$$(rF)_t = \frac{rF}{i}\left[(1+i)^t - 1\right]$$

- 按单利计算应计利息为

$$(rF)_t = trF$$

账面值的三种计算方法 $V_t = P_t - (rF)_t$

– 理论方法

$$V_t = (1+i)^t P_0 - \frac{rF}{i}\left[(1+i)^t - 1\right]$$

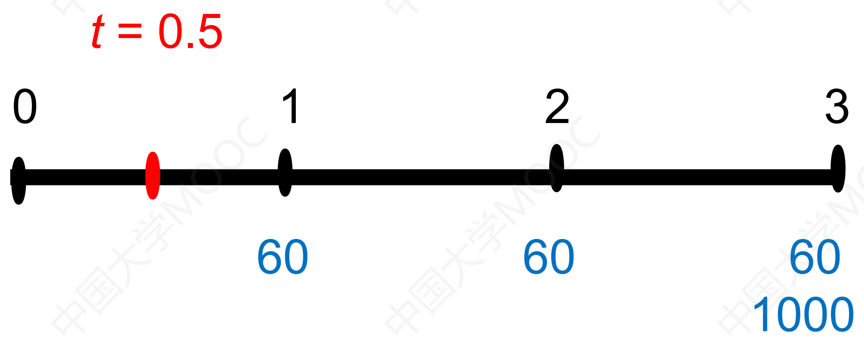
– 半理论方法

$$V_t = (1+i)^t P_0 - trF$$

– 实践方法

$$V_t = (1+ti) P_0 - trF$$

例：债券面值为1000元， 年息票率为6%， 每年末支付一次利息， 期限为3年，到期按面值偿还。债券的到期收益率为8% 。计算债券在购买6个月后的价格和账面值。



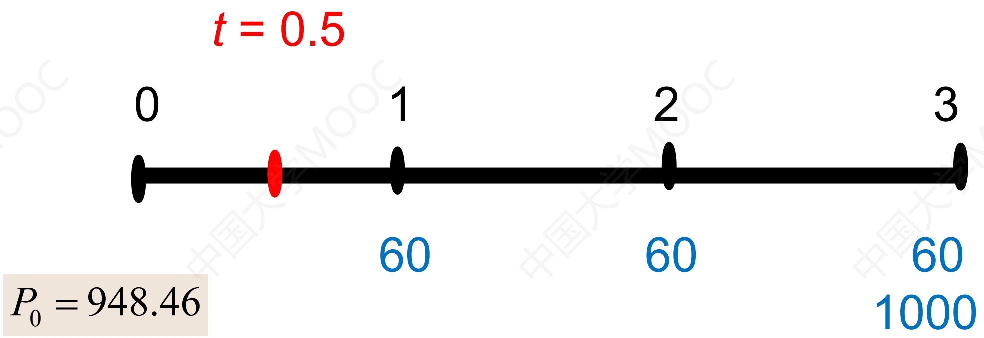
解：债券的价格（应用溢价公式）为

$$P_0 = 1000 + 1000(0.06 - 0.08)a_{\overline{3}|0.08} = 948.46$$

购买6个月后的价格（$t = 0.5$）为

$$P_t = (1+i)^t P_0 = 1.08^{0.5} \times 948.46 = 985.67$$

6个月后的账面值：



– **理论方法：**

$$V_t = P_t - \frac{rF}{i}\left[(1+i)^t - 1\right]$$

$$= 985.67 - \frac{0.06 \times 1000}{0.08}[(1+0.08)^{0.5} - 1] = 956.25$$

– **半理论方法：**

$$V_t = P_t - trF = 985.67 - 0.5 \times 0.06 \times 1000 = 955.67$$

– **实践方法：**

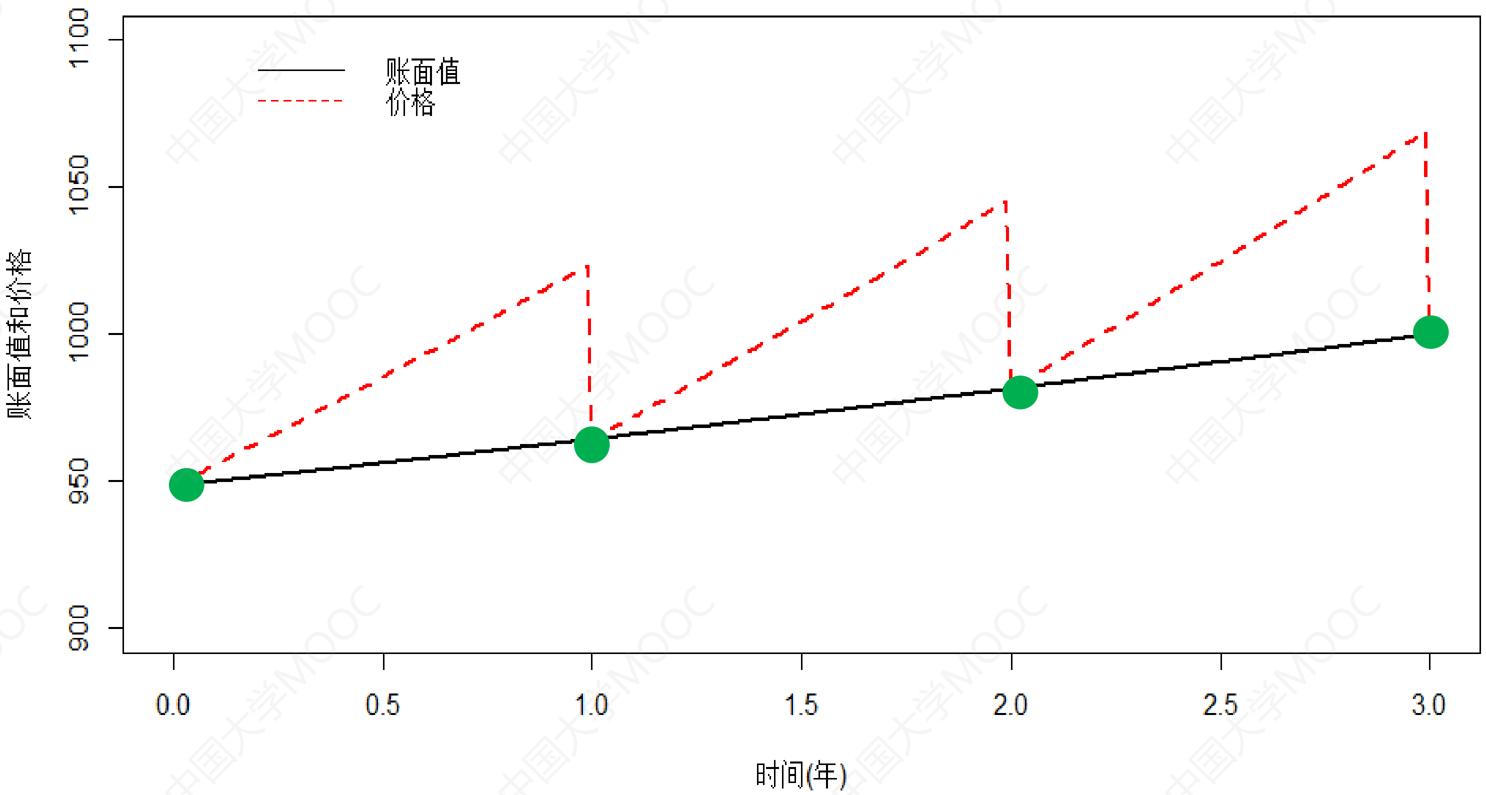
$$V_t = (1+ti)P_0 - trF = 956.40$$

债券的价格和账面值

季度	价格	账面值		
		理论方法	半理论方法	实践方法
0	**948.46**	**948.46**	**948.46**	**948.46**
1	966.89	952.32	951.89	952.43
2	985.67	956.25	955.67	956.40
3	1005.00	960.25	959.82	960.37
4	**964.34**	**964.34**	**964.34**	**964.34**
5	983.07	968.50	968.07	968.63
6	1002.17	972.75	972.17	972.91
7	1021.64	977.07	976.64	977.20
8	**981.48**	**981.48**	**981.48**	**981.48**
9	1000.55	985.98	985.55	986.11
10	1019.98	990.56	989.98	990.74
11	1039.80	995.24	994.80	995.37
12	**1000**	**1000**	**1000**	**1000**

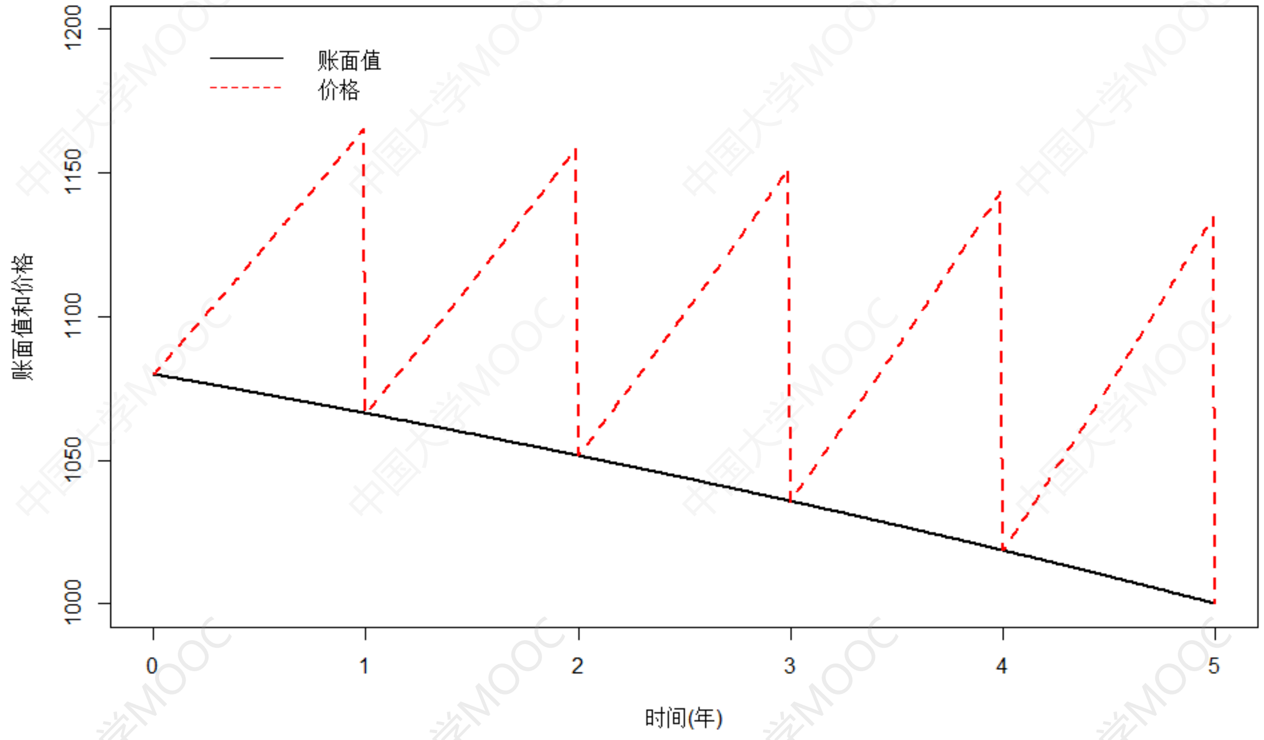
- 实践方法更加接近理论方法

价格和账面值的变化过程



- 在付息日期，价格 = 账面值。
- 在每个付息周期，价格先增后降。

练习： **债券的面值为1000元，年息票率为10%，每年末支付一次利息，期限为5年，到期按面值偿还。到期收益率为8%。应用理论方法计算该债券在25个月末的价格和账面值。**



```r
i = 8/100
v = 1/(1+i)
a3 = (1-v^3)/i
P2 = 100*a3 + 1000*v^3;  P2          #第2年末（第24个月末）的价格
## [1] 1052
Pt = P2*(1+i)^(1/12); Pt             #第25个月末的价格，将P2累积一个月
## [1] 1058
Vt = Pt - 100/i*((1+i)^(1/12)-1); Vt    #第25个月末的账面值（理论方法）
## [1] 1050
Vt = Pt - 100*(1/12);  Vt                #第25个月末的账面值（实践方法
## [1] 1050
```

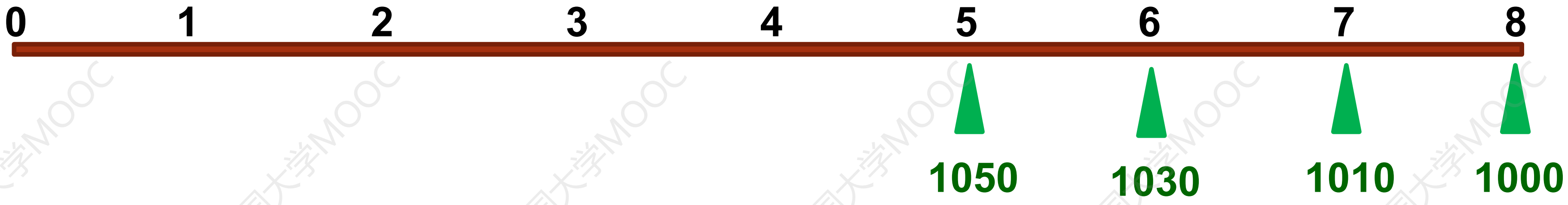
可赎回债券的价格

- 可赎回债券：发行人有权赎回的债券。
- 为什么发行可赎回债券？降低资金成本
- 通常有赎回保护期，有相对较高的收益率，补偿赎回风险。
- 赎回价格：大于到期偿还值。差额为赎回溢价

例： 8年期的可赎回债券的年息票率为12%，按面值1000元发行，到期按面值偿还。赎回保护期为5年。假设发行人从第5年末开始可以在任何一年末行使赎回权 。如果投资者要求的收益率为10%，他愿意支付的价格应为多少？

- 如果在第5年末赎回，赎回价格为1050元
- 如果在第6年末赎回，赎回价格为1030元
- 如果在第7年末赎回，赎回价格为1010元

投资者的购买价：在各种赎回日期下，债券的最低价格。



- 如果在第5年末赎回， 债券价格应为

$$P = 120a_{\overline{5}|} + 1050v^{5} = 1106.86$$

- 如果在第6年末赎回， 债券价格应为1104. 04
- 如果在第7年末赎回， 债券价格应为1102. 50
- 如果债券到期时偿还， 债券价格应为1106. 70

- 投资者的购买价格应为1102. 50元。

如何赎回日期很多，如何快速计算债券的最低价格？

$$P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

$$P = F + F(r - i)a_{\overline{n}|}$$

$g - i > 0$， n 越小，价格越低

$g - i < 0$， n 越大，价格越低

例：10年期可赎回债券的面值为100，年息票率为6%，每半年支付1次利息。5年以后的可赎回价格为102。如果债券每半年复利一次的年收益率为7%，计算债券的价格。

$rF = 3$， $g = 3/102 = 2.94\%$， $i = 3.5\%$

$g < i$， n 越大， 价格越低， 故 $n = 20$

$$P = C + C(g-i)a_{\overline{n}|} = 102 + 102 \times (2.94\% - 3.5\%) \times a_{\overline{20}|3.5\%} = 93.90$$

练习：投资者购买了10年期可赎回债券，面值为100，年息票率为6%，每年支付2次利息。5年以后的可赎回价格为102。如果债券每半年复利一次的收益率为5%，计算债券的价格。

参考答案:

$rF = 3$，　$g = 3/102 = 2.94\%$，　$i = 2.5\%$

$g > i$，　n 越小，　价格越低，　故 $n = 10$

$$P = 102 + 102 \times (2.94\% - 2.5\%) \times a_{\overline{10}|2.5\%} = 105.94$$

贴现债券的价格

P = 到期偿还值 ×（1 － 贴现率 × 债券期限）

例：2023年1月1日发行一种面值和偿还值均为100元的贴现债券，2023年8月31日到期，年贴现率为5%。计算债券的价格。

解：

$$P = 100 \times \left(1 - 5\% \times \frac{8}{12}\right) = 96.67（元）$$

基价公式（了解）

- 基价（G）。为了获得周期性收益 rF 所须的投资额。
- 每期的利息收入等于息票收入： $iG = rF$
- 息票收入：$rF = gC = iG$

基价公式： $P = G + (C - G)v^n$

$$P = rFa_{\overline{n|}} + Cv^n$$

$$= iGa_{\overline{n|}} + Cv^n$$

$$= G(1 - v^n) + Cv^n$$

$$= G + (C - G)v^n$$

Makeham公式（了解）

由于 $rF = gC$， 应用基本公式

$$P = gCa_{\overline{n}|} + Cv^n$$

$$= gC\frac{1-v^n}{i} + Cv^n$$

$$= \frac{g}{i}\left(C - Cv^n\right) + Cv^n$$

$$\Rightarrow P = \frac{g}{i}(C - K) + K \qquad (K = Cv^n)$$

Makeham公式的应用：计算分期偿还债券的价格

$$P_s = \frac{g}{i}(C_s - K_s) + K_s$$

$$P = \sum_{s=1}^{n} P_s = \frac{g}{i}\left(\sum_{s=1}^{n} C_s - \sum_{s=1}^{n} K_s\right) + \sum_{s=1}^{n} K_s$$

分期偿还债券的价格（应用makeham公式）

例：假设债券的面值为1000元，年息票率为5%，从第6年末开始，发行人分5次偿还，每次偿还1/5， 每年末的偿还额为205元，第10年末还清。假设到期收益率为6%，求该债券的价格。

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
						205	205	205	205	205
	50	50	50	50	50	50	40	30	20	10

- **分解为5个债券：面值均为200，偿还值均为205元 ， 期限为6–10年。**

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	200						205				
	200							205			
	200								205		
	200									205	
	200										205
面值							偿还值				

$$P=\frac{g}{i}\left(\sum_{s=1}^{5}C_s-\sum_{s=1}^{5}K_s\right)+\sum_{s=1}^{5}K_s$$

$r=5\%$

$g = 200\times 5\%\div 205 = 0.04878$

$i=6\%$

- **修正息票率为**

$$g = 200 \times 5\% \div 205 = 0.04878$$

- **偿还值之和为**

$$C = \sum_{s=1}^{5} C_s = 205 \times 5 = 1025$$

- **偿还值的现值之和为**

$$K = \sum_{s=1}^{5} K_s = 205 v^5 a_{\overline{5}|} = 645.28$$

- **原债券的价格为**

$$P = \frac{g}{i}(C - K) + K = 953.99$$

衡量债券收益水平的指标（了解）

$$息票率(r)=\frac{息票收入}{面值(F)}$$

$$修正息票率(g)=\frac{息票收入}{偿还值(C)}$$

$$到期收益率(i)=\frac{息票收入}{基价(G)}$$

$$当期收益率(\text{current yield})=\frac{息票收入}{债券价格}$$

中国人民大学 RENMIN UNIVERSITY OF CHINA | 统计学院 SCHOOL OF STATISTICS

债券价值分析

小结

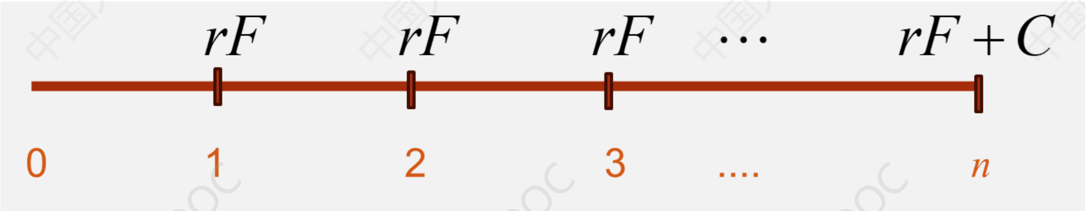
孟生旺

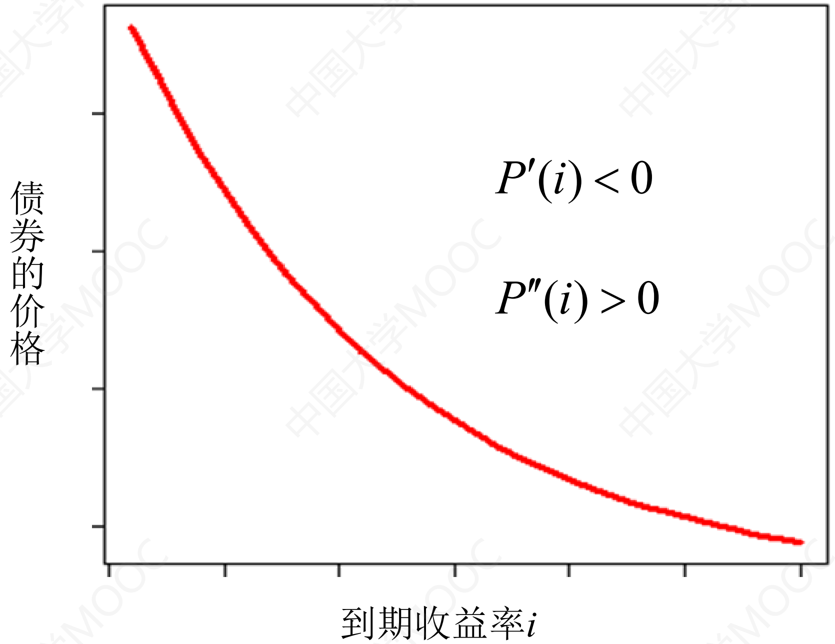
债 券

- 债券的价格
  - 基本公式、溢价公式（重点）
  - 基价公式、Makeham公式（了解）
- 债券的账面值
  - 理论方法、半理论方法、实践方法
- 可赎回债券
- 贴现债券

基本公式：

$$P = rFa_{\overline{n}|} + C\,v^{n}$$





溢价公式：

$$P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

当 $C = F$ 时，$g = r$

$$P = F + F(r - i)a_{\overline{n}|}$$

平价发行，$r = i$

溢价发行，$r > i$

折价发行，$r < i$

若 $r = i$，价格与期限无关

若 $r > i$，期限越长，价格越高

若 $r < i$，期限越长，价格越低

付息日期的价格和账面值：

$$V_k = rFa_{\overline{n-k}|i} + Cv^{n-k} \qquad = C + C(g-i)a_{\overline{n-k}|i}$$

基本公式　　溢价公式　　（将来法）

$$V_k = P(1+i)^k - rF \cdot s_{\overline{k}|i}$$

（过去法）

递推公式： $V_0 = P,\quad V_k = V_{k-1}(1+i) - rF$

非付息日期的价格：

$$P_t = (1+i)^t P_0$$

非付息日期的账面值：

$$V_t = P_t - (rF)_t$$

其中 $\begin{cases} (rF)_t = \dfrac{rF}{i}\left[(1+i)^t - 1\right] \\ (rF)_t \approx trF \end{cases}$

非付息日期的账面值：

– 理论方法 $$V_t=(1+i)^t P_0-\frac{rF}{i}\left[(1+i)^t-1\right]$$

– 半理论方法 $$V_t=(1+i)^t P_0-trF$$

– 实践方法 $$V_t=(1+ti)P_0-trF$$

可赎回债券的价格：

$$P = C + C(g - i)a_{\overline{n}|}$$

$g - i > 0$， n 越小，价格越低

$g - i < 0$， n 越大，价格越低

$$P = F + F(r - i)a_{\overline{n}|}$$

$r - i > 0$， n 越小，价格越低

$r - i < 0$， n 越大，价格越低

贴现债券的价格：

P = 到期偿还值 × （1 － 贴现率 × 债券期限）

注：债券期限小于1，用单贴现近似复贴现：$(1-d)^t \approx 1-dt$